

# SPHÄRISCHE GEOMETRIE UND KARTOGRAPHIE

Diplomarbeit zur Erlangung  
des Magistergrades  
an der Formal- und Naturwissenschaftlichen  
Fakultät der Universität Wien

Eingereicht von  
Sophie Neustätter

Betreut von  
Ao. Univ.-Prof. Dr. Gerhard Kowol

Wien, im Mai 2002

INHALTSVERZEICHNIS

<b>0. EINLEITUNG</b>	<b>4</b>
<b>1. ALLGEMEINE KURVEN UND FLÄCHENBETRACHTUNG</b>	<b>5</b>
1.0. EINLEITUNG	5
1.1. DER BEGRIFF DER KURVE IM RAUM	5
1.2. ORIENTIERUNG	7
1.3. TANGENTE UND TANGENTENVEKTOR	7
1.4. DIE BOGENLÄNGE	8
1.5. DIE KRÜMMUNG	9
1.6. BINORMALENVEKTOR UND TORSION	11
1.7. FRENETSCHES DREIBEIN	13
1.8. BEGRIFF DER FLÄCHE IM RAUM	14
1.9. FLÄCHENKURVEN	16
1.10. TANGENTIALEBENE	16
1.11. ORIENTIERUNG VON FLÄCHEN	17
1.12. ERSTE FUNDAMENTALFORM	18
1.13. LÄNGENMESSUNG AUF FLÄCHENSTÜCKEN	19
1.14. WINKELMESSUNG	20
1.15. FLÄCHENINHALTSMESSUNG AUF FLÄCHENSTÜCKEN	21
1.16. KRÜMMUNG VON FLÄCHEN	21
1.17. DER BEGRIFF DER GEODÄTISCHEN	27
1.18. ABBILDUNG ZWEIER FLÄCHEN AUF EINANDER	27
1.19. THEOREMA EGREGIUM von GAUSS	30
1.20. DER SATZ VON GAUSS-BONNET und seine Anwendungen	32
<b>2. SPHÄRISCHE GEOMETRIE</b>	<b>34</b>
<b>2.1. GESCHICHTE DER KUGELGEOMETRIE</b>	<b>34</b>
<b>2.2. GRUNDBEGRIFFE</b>	<b>38</b>
2.2.2. GEODÄTISCHE LINIEN	40
2.2.3. SPHÄRISCHES ZWEIECK	41
2.2.4. SPHÄRISCHES DREIECK	42
2.2.5. POLARDREIECK	44
2.2.6. KRÜMMUNG DER SPHÄRE	48
<b>2.3. DIE WICHTIGSTEN SÄTZE ZUR BERECHNUNG VON SPHÄRISCHEN DREIECKEN</b>	<b>49</b>
2.3.1. DIE GRUNDFORMELN DER SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE	49
<b>2.4. DAS RECHTWINKELIGE SPHÄRISCHE DREIECK</b>	<b>56</b>
2.4.1. SPHÄRISCHER SATZ DES PYTHAGORAS	56
2.4.2. DIE NEPERSCHEN REGELN	56
<b>2.5. VERGLEICH MIT EUKLIDISCHER GEOMETRIE</b>	<b>60</b>
<b>2.6. ANWENDUNGEN IN DER MATHEMATISCHEN GEOGRAPHIE</b>	<b>62</b>
2.6.1. GESTALT UND GRÖÖBE DER ERDE	62
2.6.2. GEOGRAPHISCHE KOORDINATEN AUF DER ERDKUGEL	64
2.6.4. ORTHODROME – LOXODROME	65

<b>3. KARTOGRAPHIE</b>	<b>71</b>
<b>3.1. GESCHICHTE DER KARTOGRAPHIE</b>	<b>71</b>
<b>3.2. PROBLEMSTELLUNG – ABBILDUNG DER KUGELOBERFLÄCHE IN EINE EBENE</b>	<b>75</b>
<b>3.3. KARTENNETZENTWÜRFE</b>	<b>75</b>
3.3.1. EINTEILUNGSARTEN	76
3.3.2. VERZERRUNGSVERHÄLTNISSE	78
3.3.3. KEGELENTWÜRFE – ECHTE ENTWÜRFE	83
3.3.3.1. Eigentliche Kegelentwürfe	83
3.3.3.2. Zylindrische Abbildungen	92
3.3.3.3. Azimutale Abbildungen	96
3.3.4. NICHTKEGELIGE ENTWÜRFE	104
3.3.4.1. Transformation von Kartennetzen	111
3.3.4.2. Mischkarten	114
<b>4. SCHLUSSBETRACHTUNG</b>	<b>115</b>
<b>ANHANG</b>	<b>116</b>
<b>LEBENS LAUF</b>	Fehler! Textmarke nicht definiert.
<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>123</b>
<b>INTERNETADRESSEN</b>	<b>125</b>
<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</b>	<b>126</b>

## 0. EINLEITUNG

DIE MATHEMATIK IST DAS INSTRUMENT, WELCHES DIE VERMITTLUNG  
BEWIRKT ZWISCHEN THEORIE UND PRAXIS, ZWISCHEN DENKEN UND BEOBACHTEN:  
SIE BAUT DIE VERBINDENDE BRÜCKE UND GESTALTET SIE IMMER TRAGFÄHIGER.  
DAHER KOMMT ES, DASS UNSERE GANZE GEGENWÄRTIGE KULTUR, SOWEIT SIE AUF  
DER GEISTIGEN DURCHDRINGUNG UND DIENSTBARMACHUNG DER NATUR BERUHT,  
IHRE GRUNDLAGE IN DER MATHEMATIK FINDET.  
( David Hilbert )

Nach Vorschlag meines Betreuers Prof. Kowol setzte ich mich im Zuge dieser Arbeit mit den beiden Themenkreisen der Sphärischen Geometrie und Kartographie, genauer den Kartographischen Abbildungsmöglichkeiten der Erde aus mathematischer Sicht, näher auseinander.

Die Themenstellung war für mich vor allem aufgrund zweier Eigenschaften interessant: Einerseits stellt sie eine Brücke zwischen den beiden von mir studierten Fächern dar und bietet die Möglichkeit der Ausarbeitung eines mathematischen Zugangs zu der bisher nur aus geographischer Sicht betrachteten Kartenkunde. Zweitens erscheint dieses Thema auch im Elementaren im Vergleich zu anderen Gebieten als ein sehr praxisnaher und anwendungsorientierter Bereich der Mathematik.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Grundlagen der Sphärischen Geometrie und ihre Verwendung in der Erdkunde z.B. bei der Bestimmung des Verlaufs bestimmter Kurven auf der Erde darzustellen sowie das Grundprinzip der mathematischen Abbildung der Erde mit den verschiedenen Möglichkeiten aufzuzeigen – als Einstieg für ein näheres Studium.

Das erste Kapitel dient der Bereitstellung von Hilfsmitteln und Sätzen aus der Differentialgeometrie zur Bearbeitung der beiden Themengebiete.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Sphärischen Geometrie, die heutzutage in der Schulmathematik fast vollkommen verschwunden ist. Es führt nicht nur die wichtigsten Sätze der Sphärischen Geometrie an, sondern versucht auch, kurz den Zusammenhang zwischen Sphärischer und Euklidischer Geometrie aufzuzeigen und endet mit Anwendungen der Sphärischen Geometrie in der Geographie.

Das dritte Kapitel befasst sich mit dem mathematischen Zugang zur Konstruktion von Kartennetzentwürfen. Es bietet einen Überblick über Abbildungsmöglichkeiten der Erde und Abbildungsgleichungen ausgewählter Netzentwürfe.

# 1. ALLGEMEINE KURVEN UND FLÄCHENBETRACHTUNG

## 1.0. EINLEITUNG

Kurven und Flächen unterschiedlicher Gestalt, von der Natur vorgegeben, umgeben uns ständig, angefangen von den Planetenbahnen über Flussläufe bis hin zum Spinnennetz. Gerade in der Darstellung der Erdoberfläche spielen sie eine bedeutende Rolle.

Zurückgehend auf Untersuchungen zur Flächentheorie von GAUSS (1777-1855), einem der ersten Mathematiker, der sich mit der inneren Flächenlehre auseinandersetzte, soll folgendes Kapitel einen kurzen Überblick über Begriffe der elementaren Differentialgeometrie in bezug auf die Betrachtung von Kurven auf Flächen geben und begriffliche Voraussetzungen für die nähere Untersuchung der Kugeloberfläche und ihrer Abbildungsmöglichkeiten schaffen.

## 1.1. DER BEGRIFF DER KURVE IM RAUM

Um Kurven im Raum mit den Hilfsmitteln der Mathematik analysieren zu können, benötigt man eine mathematische Darstellung.

Definition: Sei  $\alpha: I \rightarrow \tilde{N}^3$ , gegeben durch  $t \mapsto \alpha(t)$ , eine differenzierbare Abbildung eines offenen Intervalls  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$  in den  $\tilde{N}^3$ .  $\alpha$  heißt eine parametrisierte differenzierbare Kurve, im weiteren kurz Kurve. Die Variable  $t$  bezeichnet man als Parameter der Kurve.

Das Intervall  $I$  kann auch halboffen oder abgeschlossen sein, wobei auch die Werte  $a = -\infty$  und  $b = +\infty$  zugelassen werden. Die Differenzierbarkeitsbedingung muss dabei immer auf das Innere beschränkt bleiben.

Die Bildmenge  $\alpha(I) \subset \tilde{N}^3$  nennt man Spur von  $\alpha$ .

Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems lautet die Komponentendarstellung:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Die Differenzierbarkeitsbedingung besagt dann, dass die Abbildung  $\alpha$  jedes  $t \in I$  auf einen Punkt  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \tilde{N}^3$  so abbildet, dass die Funktionen  $x(t), y(t), z(t), I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind. Man spricht auch von der Zugehörigkeit zur Klasse  $C^1$ . Sind die Funktionen  $r$ -mal ( $r \in \mathbb{N}$ ) differenzierbar, so gehören sie der Klasse  $C^r$  an.

BEISPIEL 1: Durch  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ ,  $t \in \tilde{\mathbb{N}}$ , ist eine Kurve definiert. Ihre Spur ist die sogenannte Schraubenlinie mit der Ganghöhe  $2\pi c$  auf der Zylinderfläche  $x^2 + y^2 = r^2$ . Ist  $c > 0$ , so ergibt sich eine Rechtswindung der Kurve,  $c < 0$  liefert eine Linkswindung.

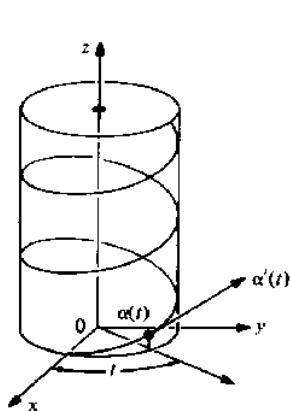


Abb. 1

Ist die Kurve  $\alpha$  nicht bijektiv, können sogenannte Mehrfachpunkte auftreten, d.h.  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$  für  $t_1 \neq t_2$ . Kurven ohne Mehrfachpunkte nennt man einfach.

Zwei unterschiedlich parametrisierte Kurven können dieselbe Spur haben, z.B.  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ . Ihre gemeinsame Spur ist der Kreis  $x^2 + y^2 = 1$ . Hier kann man von der ersten Parameterdarstellung der Kurve durch die Transformation  $t \mapsto 2t$  zu der zweiten übergehen. Allgemein werden erlaubte Parametertransformationen wie folgt definiert.

Definition: Es seien  $I, \hat{I}$  zwei Intervalle. Eine Parametertransformation  $\varphi: \hat{I} \rightarrow I$ , definiert durch  $\hat{t} \mapsto t = \varphi(\hat{t})$ , heißt zulässig bezüglich der Kurve  $\alpha: I \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}^3$ , wenn  $\varphi$  bijektiv ist,  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  differenzierbar sind und  $\varphi'(\hat{t}) \neq 0$  für alle  $\hat{t} \in \hat{I}$  gilt. Die Abbildung  $\alpha \circ \varphi: \hat{I} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}^3$  ist dann wieder eine Kurve.

Zwei Parameterdarstellungen von  $\alpha$  heißen äquivalent, falls sie durch eine zulässige Parametertransformation ineinander übergehen. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, sodass Klassen äquivalenter Darstellungen einer Kurve entstehen. Bei Aussagen in der Differentialgeometrie ist deshalb immer die Invarianz gegenüber zulässiger Parametertransformationen zu prüfen.

## 1.2. ORIENTIERUNG

Sei die Kurve  $\alpha$ , definiert im Intervall  $(a,b)$ , gegeben. Die Kurve  $b$  sei definiert auf dem Intervall  $(-b,-a)$  durch  $b(-s) = \alpha(s)$ . Die Kurve  $b$  weist dieselbe Spur wie die Kurve  $\alpha$  auf, aber mit umgekehrter Durchlaufrichtung. Man sagt, die beiden Kurven  $\alpha$  und  $b$  unterscheiden sich voneinander durch die Orientierung.

Dabei spricht man von positiver Orientierung der Kurve, wenn das Parameterintervall im Sinn von wachsenden Werten durchlaufen wird; von negativer Orientierung, wenn es im Sinn von fallenden Werten durchlaufen wird.

## 1.3. TANGENTE UND TANGENTENVEKTOR

Der Begriff der Tangente an eine Kurve wird im Raum analog wie in der Ebene eingeführt.

Sei  $\alpha: I \rightarrow \tilde{N}^3$ ,  $t \in I$ , eine parametrisierte differenzierbare Kurve. Zu jedem  $t \in I$  mit  $\alpha'(t) \neq 0$  existiert eine Gerade durch den Punkt  $\alpha(t)$  mit dem Richtungsvektor  $\alpha'(t)$ . Die Gerade heißt Tangente an  $\alpha$  bei  $t$ .

Für das nähere Studium der Kurve ist es wesentlich, dass die Tangente in jedem Punkt der Kurve existiert. Die Definition der Kurve wird deshalb folgendermaßen eingeschränkt:

Definition: Eine parametrisierte differenzierbare Kurve  $\alpha: I \rightarrow \tilde{N}^3$  heißt regulär oder glatt, falls  $\alpha'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

Das bedeutet, dass an jedem Punkt der Kurve eine Tangente existiert.

Definition: Sei  $\alpha: I \rightarrow \tilde{N}^3$ ,  $t \in I$ ,  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , eine reguläre parametrisierte Kurve. Der Vektor  $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$  heißt der Tangentenvektor (oder Geschwindigkeitsvektor) der Kurve  $\alpha$  bei  $t$ .

Die erste Ableitung der Funktion  $\alpha(t)$ ,  $\alpha'(t)$  ist der Richtungsvektor der Tangente im Kurvenpunkt  $\alpha(t)$ . Daraus ergibt sich die Tangentengleichung  $x(\lambda) = \alpha(t) + \lambda \alpha'(t)$ ,  $\lambda \in \tilde{N}$ .

**BEISPIEL 2:** Die Kurve  $a(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ ,  $t \in \tilde{N}$ , hat bei  $t$  den Tangentenvektor  $a'(t) = (-\sin t, \cos t, c)$  und die Tangentengleichung lautet  $x(\lambda) = (\cos t, \sin t, ct) + \lambda (-\sin t, \cos t, c)$ ,  $\lambda \in \tilde{N}$ .

1.4. DIE BOGENLÄNGE

Sei  $\alpha: I \rightarrow \tilde{N}^3$ , definiert durch  $t \mapsto \alpha(t)$ , eine reguläre Kurve. Die Bogenlänge von  $\alpha$  vom Punkt  $t_0$  bis  $t$  ist definiert durch

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \tag{1}$$

wobei  $|\alpha'(t)| = \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

die Länge des Vektors  $\alpha'(t)$  darstellt.

Für eine reguläre Kurve  $\alpha$  ist die Bogenlänge  $s$  eine differenzierbare Funktion von  $t$  mit Wertebereich  $(0, s(t))$ , die streng monoton wachsend ist.

Daher existiert die Umkehrfunktion  $t: (0, s(t)) \rightarrow \tilde{N}^1$  gegeben durch  $s \mapsto t(s)$ . Diese ist wieder differenzierbar und streng monoton wachsend. Somit ist die Bogenlänge als Funktion in  $t$  eine erlaubte Parametertransformation. Man kann also jede differenzierbare Kurve mit der Bogenlänge parametrisieren. Im letzteren Fall heißt die Kurve natürlich parametrisiert;  $s$  wird als natürlicher Parameter bezeichnet.

*Die Ableitungen nach der Bogenlänge  $s$  werden wie in der Literatur üblich mit Punkten gekennzeichnet, die Ableitungen nach einem beliebigen anderen Parameter  $t$  durch Striche.*

BEISPIEL 3: Betrachten wir wieder die Kurve  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ , die in eine natürlich parametrisierte Kurve umgewandelt werden soll.

$$s = \varphi^{-1}(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t |(-\sin t, \cos t, c)| dt = \int_0^t \sqrt{c^2 + 1} dt = t \cdot \sqrt{c^2 + 1}$$

$$t = \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \cdot s$$

$$\beta(s) = \alpha \circ \varphi(s) = \alpha \left( \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \cdot s \right) = \left( \cos \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \cdot s, \sin \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \cdot s, c \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \cdot s \right)$$

Die Parameterdarstellung hat Einfluss auf den Tangentenvektor. Ist insbesondere  $\alpha$  eine natürlich parametrisierte Kurve, so ist der Tangentenvektor  $t(s)$  ein Einheitsvektor.



Berechnet man nämlich die Länge des Tangentenvektors,

$$|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt}$$

so ergibt sich für eine natürlich parametrisierte Kurve  $\alpha$  :

$$|\vec{\alpha}(s)| = \frac{ds}{ds} = 1$$

### 1.5. DIE KRÜMMUNG

Ist der Verlauf einer Kurve in der Umgebung eines ihrer Punkte nicht geradlinig, sagt man, die Kurve sei „gekrümmt“. Alexandrow drückt die Vorstellung der Krümmung so aus: „Man erhält sie (die Krümmung) als Präzisierung der anschaulichen Vorstellung von der Krümmung als Geschwindigkeit der Richtungsänderung der Kurve.“

( [1], Seite 20 )

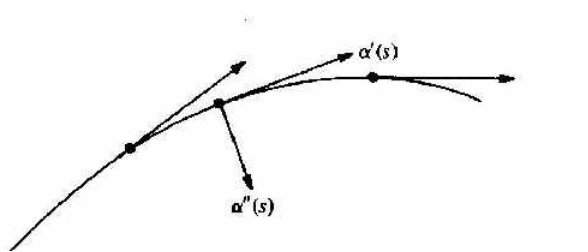


Abb. 2

Für die exakte Definition der Krümmung geht man von der natürlichen Parametrisierung der Kurve  $\alpha$  aus. Als Maß der Krümmung wird die Änderung des Winkels zwischen „benachbarten“ Tangentenvektoren angesehen. Eine Gerade hat nach dieser Vorgangsweise die Krümmung Null, ein Kreis weist eine konstante Krümmung auf.

Definition: Sei  $\alpha: I \rightarrow \tilde{N}^3$  eine natürlich parametrisierte Kurve. Der Betrag der zweiten Ableitung  $|\vec{\alpha}(s)| =: k(s)$  heißt Krümmung von  $\alpha$  bei  $s$ .  $\vec{\alpha}(s)$  nennt man auch Krümmungsvektor der Kurve  $\alpha$ . Der Kehrwert der Krümmung  $1/k(s)$  wird als Krümmungsradius bezeichnet.

Betrachtet man beispielsweise eine Gerade im Raum,  $\alpha(s) = us + v$  ( $u, v$ , konstante Vektoren), so gilt:  $\vec{\alpha}(s) = u$ ,  $\vec{\alpha}(s) = 0$ . Ihre Krümmung beträgt offensichtlich 0.

Umgekehrt falls  $k = |\vec{\alpha}(s)| \equiv 0$  folgt durch Integrieren

$$\int \vec{\alpha}(s) ds = u, \quad \int \vec{\alpha}(s) ds = \int u ds = us + v$$

$\alpha(s) = us + v$ . Man sieht, dass eine Kurve im Raum mit Krümmung 0 stets eine Gerade ist.

$\vec{\alpha}(s)$  und somit auch die Krümmung  $k(s)$  sind invariant bei Orientierungswechsel, da der Tangentenvektor  $\vec{\alpha}(s)$  bei Orientierungswechsel nur das Vorzeichen ändert.

Im Gegensatz zum Tangentenvektor ist der Krümmungsvektor im allgemeinen kein Einheitsvektor.

BEISPIEL 4: Betrachten wir die zuvor erhaltene natürlich parametrisierte Kurve  $\alpha(s)$  mit der Spur der Schraubenlinie :

$$\alpha(s) = \left( \cos \frac{1}{a} s, \sin \frac{1}{a} s, \frac{c}{a} s \right) \text{ wobei } a = \sqrt{c^2 + 1}$$

Der Tangentenvektor von  $\vec{\alpha}(s)$  ist ein Einheitsvektor, denn :

$$\vec{\alpha}(s) = \left( -\frac{1}{a} \sin \left( \frac{s}{a} \right), \frac{1}{a} \cos \left( \frac{s}{a} \right), \frac{c}{a} \right)$$

$$|\vec{\alpha}(s)| = \sqrt{\left( \frac{1}{a^2} \sin^2 \left( \frac{s}{a} \right) + \frac{1}{a^2} \cos^2 \left( \frac{s}{a} \right) + \frac{c^2}{a^2} \right)} = 1$$

Berechnet man den Krümmungsvektor der Kurve  $\alpha$

$$\vec{\alpha}(s) = \left( \frac{1}{a^2} \cos \left( \frac{s}{a} \right), \frac{1}{a^2} \sin \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right)$$

so beträgt dessen Länge

$$|\vec{\alpha}(s)| = \sqrt{\frac{1}{a^4} \cos^2 \left( \frac{s}{a} \right) + \frac{1}{a^4} \sin^2 \left( \frac{s}{a} \right)} = \frac{1}{c^2 + 1}$$

Für  $c \neq 0$  ist somit der Krümmungsvektor der Kurve  $\alpha$  kein Einheitsvektor.

Ist jedoch  $k(s) \neq 0$ , so gibt es einen wohldefinierten Einheitsvektor  $n(s)$  in Richtung  $\vec{\alpha}(s)$ , definiert durch die Gleichung  $\vec{\alpha}(s) = k(s) n(s)$ . Dabei gilt

$$n(s) = \frac{\vec{\alpha}(s)}{|\vec{\alpha}(s)|} = \frac{\vec{\alpha}(s)}{k(s)} \quad (2)$$

Definition: Der Vektor  $n(s)$  heißt Normalenvektor der Kurve und steht normal auf den Tangentenvektor  $t(s)$ , denn differenziert man beide Seiten der Gleichung

$$\alpha(s) \cdot \alpha(s) = 1 \quad \left| \frac{d}{ds} \right. \text{ erhält man}$$

$$\alpha'(s) \cdot \alpha(s) + \alpha(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \alpha(s) = 0$$

Die Ebene, die durch  $t(s)$  und  $n(s)$  erzeugt wird, heißt Schmiegeebene bei  $s$ .

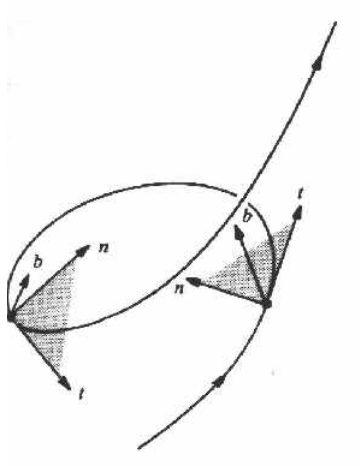


Abb. 3.

In Punkten mit  $k(s) = 0$  ist der Normalenvektor nicht definiert. Punkte  $s \in I$  mit  $\alpha'(s) = 0$  nennt man singuläre Punkte 0. Ordnung, analog dazu heißen Punkte  $s \in I$  mit  $\alpha''(s) = 0$ , singuläre Punkte 1. Ordnung. Kurven, die solche Punkte beinhalten, sollen in der weiteren Ausführung ausgenommen werden, da die Existenz der Schmiegeebene für eine lokale Untersuchung von Kurven wesentlich ist.

### 1.6. BINORMALENVEKTOR UND TORSION

Für die nächsten Begriffe, die die Kurve weiter beschreiben sollen, ist die Kenntnis des Vektorprodukts Voraussetzung. Das Vektorprodukt von zwei Vektoren  $u$  und  $v$  im  $\tilde{N}^3$  ist der Vektor  $u \times v = w \in \tilde{N}^3$  mit den Komponenten

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3$$

$$w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1$$

Wie man durch Ausrechnen sofort erkennt, steht  $w$  orthogonal zu  $u$  und  $v$ . Weiters gilt: Der Betrag  $|w| = |u \times v|$  ist gleich der Fläche des von  $u$  und  $v$  aufgespannten Parallelogramms, und damit gilt  $|u \times v| = |u| |v| \sin(u, v)$ .

Zurück zur Betrachtung der Kurve. Aus dem Tangentenvektor und dem Normalenvektor wird durch das Vektorprodukt ein zur Schmiegebene normaler Einheitsvektor erzeugt:  $b(s) = t(s) \times n(s)$ .

Definition:  $b(s)$  heißt Binormalenvektor der Kurve  $\alpha$  bei  $s$ . Der Betrag der Ableitung des Binormalenvektors,  $|\dot{b}(s)|$  gibt an, wie rasch sich die Kurve in einer Umgebung von  $s$  aus der Schmiegebene bei  $s$  herauswindet.

$\dot{b}(s)$  ist normal zu  $b(s)$ , denn da  $b(s)$  ein Einheitsvektor ist, gilt  $b(s) \cdot b(s) = 1$ .

Differenziert man beide Seiten der Gleichung, so erhält man  $\dot{b}(s) \cdot b(s) + b(s) \cdot \dot{b}(s) = 0$ , woraus wie zuvor folgt  $\dot{b}(s) \cdot b(s) = 0$ .

Das Vektorprodukt zweier differenzierbarer Vektorfunktionen  $a$  und  $b$  wird folgendermaßen differenziert:  $(a \times b)' = a' \times b + b' \times a$ .

Somit gilt  $\dot{b}(s) = \dot{t}(s) \times n(s) + t(s) \times \dot{n}(s)$ .

Da  $\dot{t}(s) = |\dot{t}(s)| \cdot \frac{\dot{t}(s)}{|\dot{t}(s)|} = k \cdot n(s)$  ist der Ausdruck  $\dot{t}(s) \times n(s)$  gleich null und es gilt

$$\dot{b}(s) = t(s) \times \dot{n}(s).$$

Aus der Definition des Vektorprodukts folgt, dass  $\dot{b}(s)$  normal auf  $t(s)$  steht.

Da  $\dot{b}(s)$  normal auf  $b(s)$  und  $t(s)$  steht und  $n(s)$  ebenso normal auf  $b(s)$  und  $t(s)$ , folgt, dass  $\dot{b}(s)$  parallel zu  $n(s)$  ist.

Setzt man somit  $\dot{b}(s) = \tau(s) n(s)$ , so stößt man auf eine neue Größe  $\tau(s)$ .

Definition: Sei  $\alpha: I \rightarrow \tilde{N}^3$  eine natürlich parametrisierte Kurve mit  $\alpha(s) \neq 0$  für alle  $s \in I$ .

Die Zahl  $\tau(s)$ , definiert durch  $\dot{b}(s) = \tau(s) n(s)$ , heißt die Torsion von  $\alpha$  bei  $s$ .

Da  $n(s)$  ein Einheitsvektor ist, ergibt sich durch Skalarmultiplikation,

$$\tau(s) = n(s) \cdot \dot{b}(s)$$

Es gilt  $\tau(s) = 0$  genau dann, wenn die Kurve eben ist. In diesem Fall stimmt die Ebene, in der  $\alpha(s)$  liegt, mit der Schmiegebene überein. Denn  $b(s)$  steht senkrecht auf die Schmiegebene, aufgespannt durch  $t(s)$  und  $n(s)$ .

Bei ebenen Kurven mit nicht verschwindender Krümmung fallen die Schmiegebenen zusammen und sind mit der Ebene identisch, in der die Kurve liegt. Die Schmiegebene und somit  $b(s)$  sind für alle Kurvenpunkte gleich. Da  $b(s)$  konstant ist, verschwindet  $\dot{b}(s)$  und damit auch  $\tau(s)$ .

Gilt umgekehrt  $\tau(s) \neq 0$ , folgt durch Integration von  $\dot{b}(s) = \tau(s) n(s) = 0$ , dass  $b(s)$  konstant sein muss.

Für Punkte der Kurve mit  $\tau(s) \neq 0$  zeigt der Wert  $\tau(s)$  an, „wie stark und in welchem Sinne sich die Kurve in der Umgebung eines Punktes“ ... „aus der zugehörigen Schmiegebene herauswindet“, d.h. in welchem Ausmaß sie sich von einem ebenen Verlauf entfernt. Daher stammt der Name „Torsion oder Windung“ ( L. I. VALLEE, 1825 ) dieses Wertes.

Im Gegensatz zur Krümmung kann die Torsion auch negativ sein. Das Vorzeichen ist positiv, wenn man eine positiv orientierte Kurve durchläuft und man die Schmiegebene im Punkt  $\alpha(s)$  in Richtung des Binormalenvektors durchstößt.

$\dot{b}(s)$  und  $\tau(s)$  sind invariant unter Orientierungsänderung, da der Binormalenvektor  $b(s)$  bei Orientierungswechsel das Vorzeichen ändert.

### 1.7. FRENETSCHES DREIBEIN

Wie wir gesehen haben, können einer natürlich parametrisierten Kurve  $\alpha$  für jeden Parameterwert  $s$  drei Einheitsvektoren  $t(s)$  (Tangentenvektor),  $n(s)$  (Normalenvektor) und  $b(s)$  (Binormalenvektor) zugeordnet werden. Diese drei Einheitsvektoren in der Reihenfolge  $t(s)$ ,  $n(s)$  und  $b(s)$  bilden ein orthonormiertes Rechtssystem. Das Tripel  $( t(s), n(s), b(s) )$  heißt begleitendes Dreibein der Kurve oder auch Frenetsches Dreibein.

Die Ableitungen  $\dot{t}(s) = k(s) \cdot n(s)$ ,  $\dot{b}(s) = \tau(s) \cdot n(s)$  der Vektoren  $t(s)$  und  $b(s)$  bezüglich der Basis  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  liefern die geometrischen Größen Krümmung  $k$  und Torsion  $\tau$ . Berechnet man  $\dot{n}(s)$ , so lässt sich dieser Vektor als Linearkombination der Vektoren  $t$ ,  $n$  und  $b$  darstellen:

$$\dot{n}(s) = a_1 t(s) + a_2 n(s) + a_3 b(s). \text{ Da } n(s) \cdot t(s) = 0, \text{ gilt } \dot{n}(s) \cdot t(s) = -n(s) \cdot \dot{t}(s) = -a_1 = -k(s).$$

$$a_2 = \dot{n}(s) \cdot n(s) = 0 \text{ und } a_3 = \dot{n}(s) \cdot b(s) = -\tau(s)$$

Somit erhalten wir für die Ableitung des Normalenvektors  $\dot{n}(s) = -k(s) t(s) - \tau(s) b(s)$ .

Es treten also wiederum Krümmung und Torsion als Koeffizienten auf.

Die durch die Ableitung erhaltenen Gleichungen

$$\dot{t}(s) = k(s) \cdot n(s), \quad \dot{n}(s) = -k(s) t(s) - \tau(s) b(s), \quad \dot{b}(s) = \tau(s) \cdot n(s)$$

nennt man Frenetsche Formeln. Die Ebene, die durch die Vektoren  $t(s)$  und  $b(s)$  aufgespannt wird, heißt rektifizierende Ebene, die Ebene aufgespannt durch die Vektoren  $n(s)$  und  $b(s)$  Normalebene. Die Ebene, aufgespannt von den Vektoren  $t(s)$  und  $n(s)$ , ist die schon erwähnte Schmiegebene.

## 1.8. BEGRIFF DER FLÄCHE IM RAUM

Nach der Betrachtung der Kurven im Raum widmen wir uns kurz den Flächen im Raum und ihren Eigenheiten.

Der Begriff der Fläche kann unterschiedlich definiert werden. Nach Klotzek werden Flächen als „Bilder ebener Gebiete“ ( [17], Seite 80 ) betrachtet. Unter einem Gebiet  $G$  in  $F$  versteht man eine Teilmenge von  $F$ , die offen und zusammenhängend ist. Letzteres bedeutet, für alle Punkte  $a, b$  des Gebietes gibt es einen verbindenden Weg, d.h. eine stetige Abbildung  $c : [0,1] \rightarrow G$  mit  $c(0) = a, c(1) = b$ .

Ein abgeschlossenes Gebiet ist die Vereinigung des Gebietes mit seinem Rand. Ein abgeschlossenes Gebiet in  $F \subset \mathbb{N}^3$  heißt beschränkt, wenn es in einer Kugel des  $\mathbb{N}^3$  enthalten ist. Ein Flächenstück ist nach Klotzek die Bildmenge einer bijektiven Abbildung  $a$  eines beschränkten Gebietes  $G \subset \mathbb{N}^2$  in den  $\mathbb{N}^3$ .

Eine parametrisierte Fläche wird nach Carmo ( vergleiche [8], Seite 65 ) folgendermaßen definiert:

Definition: Eine parametrisierte Fläche  $a: U \subset \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$  ist eine differenzierbare Abbildung einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{N}^2$  in den  $\mathbb{N}^3$ , definiert durch  $(u,v) \in U \rightarrow a(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ .  $a$  ist regulär, wenn das Differential  $da_q: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$  injektiv ist für alle  $q \in U$ , d.h. die Vektoren  $\frac{\partial a}{\partial u}$  und  $\frac{\partial a}{\partial v}$  sind linear unabhängig für alle  $q \in U$ .

Die Menge  $a(U) \subset \mathbb{N}^3$  heißt Spur von a. Die Spur einer parametrisierten Fläche kann, auch wenn die Fläche regulär ist, Selbstdurchschneidungen haben.

In anderer Literatur wird für den Begriff „regulär“ analog zu Kurven auch der Ausdruck „glatt“ verwendet. Alexandrow liefert eine geometrische Interpretation regulärer Flächen, die er aber selbst als „nicht ganz exakt“ bezeichnet: „Geometrisch bedeutet das“ (reguläre Fläche), (...) „daß eine stetig gebogene Fläche weder Knickstellen noch andere Singularitäten hat.“ ( [1], Seite 31 )

Die Aussage, dass die Vektoren  $\frac{\partial a}{\partial u}$  und  $\frac{\partial a}{\partial v}$  linear unabhängig sind, ist äquivalent mit der Aussage, dass  $\frac{\partial a}{\partial u} \times \frac{\partial a}{\partial v} \neq 0$  ist. In diesem Fall existiert in jedem Punkt des Flächenstücks die Tangentialebene, die von diesen beiden Vektoren aufgespannt wird. Ein Punkt  $p \in U$ , in dem  $da_p$  nicht injektiv ist, heißt singulärer Punkt von  $a$ .

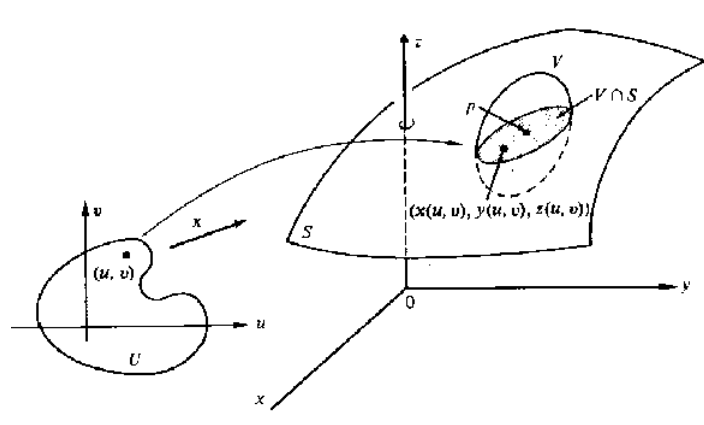


Abb. 4.

Bei dieser Definition der Fläche ist aber folgendes zu bemerken. Es gibt Flächen, die keine singulären Punkte aufweisen, aber für die keine Parameterdarstellung gefunden werden kann, die frei von singulären Stellen ist. Das betrifft z.B. Flächen wie Kugeloberfläche oder Zylinderoberfläche.

BEISPIEL 5: Die Oberfläche der Kugel mit Radius  $r$  lässt sich darstellen durch die Parameterdarstellung  $a(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$ .  $u, 0 \leq u < 2\pi$ , ist der Winkel, den die Meridianebene des Punktes  $P$  mit der  $(x, z)$ -Ebene einschließt,  $v, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ , der Winkel des Ortsvektors  $t$  mit der  $(x, y)$ -Ebene (siehe Abbildung). Die Koordinatenlinien  $u = \text{konstant}$  bzw.  $v = \text{konstant}$  sind die Meridiane bzw. Breitenkreise.

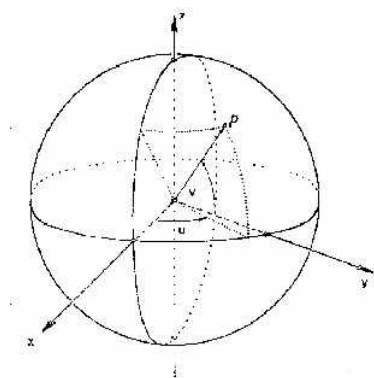


Abb. 5

Nord- und Südpol sind singuläre Stellen der Parameterdarstellung. Bildet man die partiellen Ableitungen  $\mathbf{r}_u = (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)$  und  $\mathbf{r}_v = (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$  an der Stelle  $(u | \rho/2)$  erhält man die beiden Vektoren  $\mathbf{r}_u = (0,0,0)$  und  $\mathbf{r}_v = (-r \cos u, -r \sin u, 0)$ , die linear abhängig sind. Dasselbe gilt für die partiellen Ableitungen an der Stelle  $(u | -\rho/2)$ .

## 1.9 FLÄCHENKURVEN

Nach Kreszig ([17], Seite 95) lässt sich eine Kurve auf einer Fläche folgendermaßen darstellen:

Ist  $(u,v) \in a(u,v)$  eine Darstellung der zu betrachtenden Fläche  $F$ , so bestimmt eine Parameterdarstellung  $u = u(t)$  und  $v = v(t)$ , mit  $u$  und  $v \in C^r$ ,  $r \geq 1$ , mit der reellen Variablen  $t, t \in I \subseteq \mathbb{R}$  als Parameter, eine Kurve  $\alpha$  auf  $F$ .

Durch Einsetzen in die Flächendarstellung erhält man eine Parameterdarstellung der Form  $a(u(t),v(t))$ , wobei gefordert wird, dass die ersten Ableitungen  $u'(t)$  und  $v'(t)$  nicht gleichzeitig 0 sein dürfen für ein beliebiges  $t$ .

Möchte man nun die Tangenten der Flächenkurven ermitteln, so ergibt sich für die Tangentenrichtung der Flächenkurve  $\alpha$ , definiert durch die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) = a(u(t),v(t))$$

$$\alpha' = \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial a}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = a_u u' + a_v v' \quad (3)$$

wobei wie üblich  $\mathbf{r}_u = a_u$  gesetzt wurde, analog für  $v$ .

Der Tangentenrichtungsvektor der Flächenkurve ist eine Linearkombination der Vektoren  $a_u$  und  $a_v$ , wobei sie für einen betrachteten regulären Punkt linear unabhängig sind. Er liegt daher in der von  $a_u$  und  $a_v$  aufgespannten Ebene, das ist die Tangentialebene der Fläche  $F$  im Flächenpunkt  $P$ .

## 1.10. TANGENTIALEBENE

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt  $a(u,v)$  lautet somit

$$x = a(u,v) + \lambda \cdot \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) + \mu \cdot \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ein Normalenvektor der Tangentialebene in  $a(u,v)$  ist das Vektorprodukt

$$\frac{\partial a}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)$$



Der Einheitsnormalenvektor

$$n^+(u,v) := \frac{\frac{\partial a}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)}{\left| \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) \right|}$$

heißt Flächennormalvektor (auch Normalenvektor der Fläche).

Zu erwähnen ist noch, dass zu einem Netz von Linien in der Ebene mit  $u = \text{konstant}$  bzw.  $v = \text{konstant}$  ein Kurvennetz auf einem Flächenstück gehört. Diese Kurven heißen Koordinaten-, Parameter- oder auch  $u$ -Linien ( $v = \text{konstant}$ ) bzw.  $v$ -Linien ( $u = \text{konstant}$ ).

Ist ein Punkt  $(u,v)$  in  $U$  gegeben, dann ist der Punkt  $a(u,v)$  eindeutig als Schnittpunkt der zugehörigen  $u$ - und  $v$ -Linie bestimmt.  $u$  und  $v$  nennt man krummlinige Koordinaten oder auch GAUSSsche Parameter des Punktes, in Anlehnung an die Festlegung eines Punktes im Koordinatensystem durch Parallelen zu den Achsen in der Ebene.

### 1.11. ORIENTIERUNG VON FLÄCHEN

Eine Fläche ist dann orientierbar, wenn man eine in einem beliebigen Flächenpunkt  $p$  positive Normalenrichtung wählt und diese eindeutig stetig in sämtlichen Punkten der Fläche fortsetzen kann. Ist dies nicht möglich, kann es zum Beispiel vorkommen, dass es ein geschlossenes Kurvenstück  $\alpha$  auf der Fläche  $F$  gibt, sodass man, bei einer stetigen Änderung des positiven Flächennormalenvektors längs  $\alpha$  bei der Rückkehr zu  $p$  die der ursprünglich gewählten positiven Richtung des Flächennormalenvektors entgegengesetzte Normalenrichtung erhält. Dies trifft etwa beim sogenannten „Möbius Band“ zu (vergleiche [17], Seite 133).

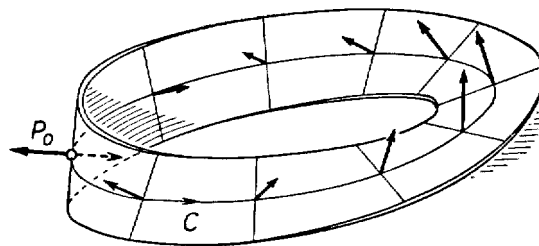


Abb. 6.

1.12. ERSTE FUNDAMENTALFORM

Die sogenannte erste Fundamentalform einer Fläche ist ein wichtiger Ausdruck, der Messungen auf der Fläche, wie der Berechnung von Kurvenlängen, Winkelmessung oder Flächeninhaltsmessung, dient. Diese erste Fundamentalform wird in den Lehrbüchern unterschiedlich eingeführt. Bei der Definition folgen wir Carmo (vergleiche [8], Seite 76).

Sei  $F \subset \mathbb{N}^3$  eine reguläre Fläche. Auf jeder Tangentialebene  $T_p(F)$  im Punkt  $p$  an die reguläre Fläche  $F$  wird durch innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  in  $\mathbb{N}^3$  ein inneres Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  induziert, d.h. sind  $w_1, w_2$  zwei Vektoren in  $T_p(F) \subset \mathbb{N}^3$ , so ist  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  gleich dem inneren Produkt von  $w_1, w_2$  als Vektoren im  $\mathbb{N}^3$ .

Dieses innere Produkt liefert eine quadratische Form  $I_p : T_p(F) \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0 \quad w \in T_p(F)$$

Definition: Die durch die Gleichung  $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$  definierte quadratische

Form  $I_p$  auf  $T_p(F)$  nennt man die erste Fundamentalform der regulären Fläche  $F \subset \mathbb{N}^3$  in  $p \in F$ . In der zur Parametrisierung  $a(u,v)$  bei  $p$  assoziierten Basis  $\{u,v\}$  ausgedrückt:

$w \in T_p(F)$  ist ein Tangentenvektor an die Kurve  $\alpha(t) = a(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  mit  $p = \alpha(0) = a(u_0, v_0)$ . Somit

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle a_u u' + a_v v', a_u u' + a_v v' \rangle_p \\ &= \langle a_u, a_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle a_u, a_v \rangle_p u'v' + \langle a_v, a_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E (u')^2 + 2F u'v' + G (v')^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Die Notation mit den Buchstaben  $E, F$  und  $G$  geht auf GAUSS zurück. Man nennt sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform in der Basis  $\{u,v\}$  von  $T_p(F)$ .

$$E = \langle a_u, a_u \rangle_p, \quad F = \langle a_u, a_v \rangle_p, \quad G = \langle a_v, a_v \rangle_p$$

Betrachten wir den Flächennormalenvektor

$$n^+(u, v) := \frac{\frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v)}{\left| \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) \right|}$$

Da der Betrag des Kreuzprodukts der beiden Vektoren gleich der Fläche des von ihnen

aufgespannten Parallelogramms ist, lässt sich der Nenner  $\left| \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) \right|$  mithilfe der Flächenformel des Parallelogramms schreiben als

$$\sqrt{\langle \mathbf{a}_u, \mathbf{a}_u \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_v \rangle - \langle \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

Durch Quadrieren der Gleichung erhält man folgende Aussage:

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|$$

Den Term  $EG - F^2$  nennt man Diskriminante der Fundamentalform.

BEISPIEL 6: Betrachten wir wieder die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche  $\mathbf{a}(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$  (siehe Beispiel 5). Mithilfe der partiellen Ableitungen  $\mathbf{a}_u = (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)$  und  $\mathbf{a}_v = (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)$  lassen sich die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Fläche bilden:

$$E = \langle \mathbf{a}_u, \mathbf{a}_u \rangle = a_u^2 = r^2 \sin^2 u \cos^2 v + r^2 \cos^2 u \cos^2 v = r^2 \cos^2 v (\sin^2 u + \cos^2 u) = r^2 \cos^2 v$$

$$F = \langle \mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v \rangle = r^2 \sin u \cos v \cos u \sin v - r^2 \cos u \cos v \sin u \sin v = 0$$

$$G = \langle \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_v \rangle = a_v^2 = r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \cos^2 v = r^2 ((\cos^2 u + \sin^2 u) \sin^2 v + \cos^2 v) = r^2$$

Die Diskriminante der Fundamentalform  $EG - F^2 = r^4 \cos^2 v$  verschwindet nur bei  $v = -\pi/2$  und  $v = \pi/2$ , d.h. an den Stellen, wo die Parameterdarstellung entartet.

### 1.13. LÄNGENMESSUNG AUF FLÄCHENSTÜCKEN

Mithilfe der ersten Fundamentalform kann man die Bogenlänge einer Flächenkurve einfach beschreiben.

Wie schon zuvor erwähnt, ist die Bogenlänge  $s$  einer regulären parametrisierten Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{N}^3$ , definiert durch  $t \in I \rightarrow \alpha(t)$ ,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt$$

Die Bogenlänge der Flächenkurve  $\alpha(t) = a(u(t), v(t))$  in einer zur Parametrisierung  $a(u, v)$  gehörenden Koordinatenumgebung zwischen  $t_0$  und  $t$  kann folgendermaßen berechnet werden:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt$$

#### 1.14. WINKELMESSUNG

Der Winkel  $j$ , unter dem sich zwei parametrisierte reguläre Kurven  $a: I \rightarrow F$ ,  $b: I \rightarrow F$  bei  $t = t_0$  schneiden, berechnet sich durch den Winkel zwischen den Tangentenvektoren der beiden Kurven. Aus der Definition des Skalarprodukts folgt:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|} \quad (6)$$

Der Schnittwinkel  $j$  zweier Flächenkurven  $a(t) = a(u_1(t), v_1(t))$  und  $b(t) = a(u_2(t), v_2(t))$  ist gleich dem Winkel zwischen den Tangentenvektoren an die beiden Flächenkurven im Schnittpunkt. Der Tangentenvektor der Kurve  $a$  hat die Form  $a'(t) = a_u u_1' + a_v v_1'$  und der Tangentenvektor der Kurve  $b$  lautet  $b'(t) = a_u u_2' + a_v v_2'$ .

Da  $\cos j = \frac{\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle}{|\alpha'(t)| \cdot |\beta'(t)|}$  erhält man durch Einsetzen

$$\cos \varphi = \frac{\langle a_u, a_u \rangle du_1 du_2 + \langle a_u, a_v \rangle du_1 dv_2 + \langle a_v, a_u \rangle du_2 dv_1 + \langle a_v, a_v \rangle dv_1 dv_2}{|d\alpha(t)| \cdot |d\beta(t)|}$$

Dabei gilt:

$$|d\alpha(t)| = \sqrt{\langle a_u, a_u \rangle du_1^2 + 2\langle a_u, a_v \rangle du_1 dv_1 + \langle a_v, a_u \rangle dv_1^2}; \text{ analog für } |d\beta(t)|.$$

Verwendet man die Koeffizienten  $E, F, G$  der ersten Fundamentalform, so berechnet sich der Winkel  $\varphi$  durch

$$\cos \varphi = \frac{E du_1 du_2 + F (du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2}{\sqrt{E du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2} \sqrt{E du_2^2 + 2F du_2 dv_2 + G dv_2^2}} \quad (7)$$

Die Kenntnis der ersten Fundamentalform ermöglicht also auch die Winkelmessung. Betrachtet man den Schnittwinkel  $\varphi$  zwischen zwei sich schneidenden Parameterkurven ( $u_1$  - Linie d.h.  $du_1 \neq 0, dv_1 = 0$ ;  $v_2$ - Linie, d.h.  $du_2 = 0, dv_2 \neq 0$ ) erhält man

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (8)$$

### 1.15. FLÄCHENINHALTSMESSUNG AUF FLÄCHENSTÜCKEN

Sowohl Kreyszig ([17], Seite 137) also auch Carmo ([8], Seite 94) liefern die geometrische Interpretation und den Beweis der folgenden Flächenformel. Da eine genaue Ausführung den Rahmen der hier benötigten Informationen sprengen würde, möchte ich nur die Definition geben und auf den Beweis verweisen.

Definition: Es sei  $J$  eine reguläre Fläche und  $R \subset J$ , ein beschränktes abgeschlossenes Gebiet im  $\tilde{N}^3$ .  $R$  sei in einer Koordinatenumgebung der Parametrisierung  $a: U \subset \tilde{N}^2 \rightarrow J$  enthalten. Der Wert des Doppelintegrals

$$\iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv = A(R), \quad Q = a^{-1}(R), \quad (9)$$

heißt Flächeninhalt von  $R$ .

Wegen Formel (5) kann er auch so ausgedrückt werden:

$$\iint_Q |a_u \times a_v| \, dudv = A(R), \quad Q = a^{-1}(R)$$

### 1.16. KRÜMMUNG VON FLÄCHEN

Um die Krümmung einer Fläche genauer zu untersuchen, betrachtet man die Krümmung der Kurven auf dieser Fläche. Da diese aber ganz unterschiedlich ausfallen können, ist es a priori nicht klar, wie die Flächenkrümmung zu definieren ist. Erst GAUSS hat eine Lösung für dieses Problem gefunden.

Man bestimmt zunächst die sogenannte zweite Fundamentalform der Fläche siehe z.B. ([7], Seite 145) folgendermaßen:

Sei  $F: (u,v) \in a(u,v), F \in C^r, r \geq 2$ , eine Fläche und  $\alpha(s)$  eine natürlich parametrisierte Kurve dieser Fläche,  $a(s) \in C^r, r \geq 2$ . Weiters sei  $\varphi$  der Winkel zwischen Normalenvektor  $n(s)$  der Kurve  $\alpha$  und Flächennormalenvektor  $n^+(u,v)$  der Fläche  $F$ . Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird in der folgenden Ausführung  $n^+(u,v)$  durch  $f$  ersetzt, die Parameter werden weggelassen.

Da  $n$  und  $f$  Einheitsvektoren sind, gilt:

$$\cos \varphi = n \cdot f$$

Ersetzt man nun  $n$  durch  $\vec{h}(s)/k(s)$ , so ergibt sich

$$k \cos \varphi = \vec{h} \cdot f \quad (10)$$

Berechnet man die rechte Seite der Gleichung erhält man:

$$\vec{h} \cdot f = (a_{uu} \vec{u}\vec{u} + a_{uv} \vec{u}\vec{v} + a_{vu} \vec{v}\vec{u} + a_{vv} \vec{v}\vec{v} + a_u \vec{u} + a_v \vec{v}) \cdot f$$

Aus der Definition des Flächennormalvektors  $f$  folgt,  $f$  steht orthogonal auf  $a_u$  bzw.  $a_v$ .

Zudem gilt  $a_{uv} = a_{vu}$  sodass man erhält:

$$\vec{h} \cdot f = a_{uu} f \vec{u}\vec{u} + a_{uv} f \vec{u}\vec{v} + a_{vu} f \vec{v}\vec{u} + a_{vv} f \vec{v}\vec{v}$$

Setzt man nun  $L := a_{uu} f$ ,  $M := a_{uv} f = a_{vu} f$ ,  $N := a_{vv} f$ , ergibt sich die quadratische Form

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (11)$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als zweite Fundamentalform der Fläche S.  $L$ ,  $M$  und  $N$  sind die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform.

BEISPIEL 7: Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Kugeloberfläche in der Parameterdarstellung  $a(u,v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$ , in der Bedeutung der Variablen und Konstanten wie in Beispiel 5, berechnet man folgendermaßen:

$$\text{Der Flächennormalenvektor } f = n^+(u,v) = \frac{\frac{\partial a}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)}{\left| \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) \right|} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

$a_u = (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)$  partiell abgeleitet nach  $u$  ergibt

$$a_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \sin u \cos v, 0)$$

$$L = a_{uu} \cdot f = (-r \cos u \cos v, -r \sin u \cos v, 0) \cdot (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) =$$

$$(-r \cos^2 u \cos^2 v - r \sin^2 u \cos^2 v) = -r \cos^2 v (\cos^2 u \sin^2 v) = -r \cos^2 v$$

$$\underline{L = -r \cos^2 v}$$

$a_u = (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)$  partiell abgeleitet nach  $v$  ergibt

$$a_{uv} = (r \sin u \sin v, -r \cos u \sin v, 0), \text{ das entspricht } a_{vu}$$

$$M = a_{uv} \cdot f = (r \sin u \sin v, -r \cos u \sin v, 0) \cdot (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) =$$

$$(r \sin u \sin v \cos u \cos v - r \cos u \sin v \sin u \cos v) = 0$$

$$\underline{M = 0}$$

$a_v = (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)$  partiell abgeleitet nach  $v$  ergibt

$$a_{vv} = (-r \cos u \cos v, -r \sin u \cos v, -r \sin v)$$

$$N = a_{vv} f = (-r \cos u \cos v, -r \sin u \cos v, -r \sin v) (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) = -r (\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) = -r$$

$$\underline{N = -r}$$

Die zweite Fundamentalform der Kugeloberfläche der Kugel mit dem Radius  $r$  lautet somit  $-r \cos^2 v du^2 - r dv^2$ .

Betrachtet man das sogenannte GAUSSsche Dreibein  $t(s), f(s) \times t(s), f(s)$ , so liegt der Krümmungsvektor  $\vec{\alpha}(s)$  der natürlich parametrisierten Kurve  $a(s)$  der Fläche  $F$  in der von  $f(s)$  und  $f(s) \times t(s)$  aufgespannten Ebene. Es gilt somit :

$$\vec{\alpha}(s) = k_g(s) (f(s) \wedge t(s)) + k_n(s) f(s) \text{ mit eindeutig bestimmten } k_g(s) \text{ und } k_n(s).$$

Definition:  $k_n(s)$  heißt Normalkrümmung der Fläche  $F$ . Der zugehörige Vektor  $x_n(s) = k_n(s) f(s)$  wird als Normalkrümmungsvektor bezeichnet. Durch Skalarmultiplikation mit  $f(s)$  erhält man für  $k_n(s)$  die Beziehung  $k_n(s) = \langle f(s), \vec{\alpha}(s) \rangle$ .

Aus der vorhergegangenen Herleitung der zweiten Fundamentalform sieht man

$$k_n(s) = k(s) \cos \varphi = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{12}$$

$k_n$  stellt die Länge der Projektion des Vektors  $x_n$  auf die Normale an die Fläche  $F$  in  $p$  dar.

**Satz von MEUSNIER (1766):**

**Alle Kurven auf einer Fläche  $F$ , die in einem gegebenen Punkt  $p \in F$  dieselbe Tangente haben, besitzen in diesem Punkt dieselbe Normalkrümmung.**

Beweis: Da in ( 8 ) auf der rechten Seite außer den Fundamentalgrößen der Fläche nur die Größen  $du$  und  $dv$  stehen, ist der Ausdruck  $k \cos j$  nur durch die Fortschrittingsrichtung  $du$  und  $dv$  bestimmt. Bei fester Fortschrittingsrichtung ist dieser Wert konstant.

$$\cos j k(s) := 1/R = \text{konstant} \tag{13}$$

Betrachten wir die Aussage noch genauer. Sei  $t$  eine beliebige, fest gewählte Tangente  $t$  der Fläche  $F$  im Punkt  $p$ . Es gibt eine Ebene, die durch  $t$  geht und  $f$  enthält. Schneidet diese Ebene die Fläche  $F$ , entsteht als Schnitt eine ebene Kurve, die man als Normalschnitt bezeichnet.

Für diese Kurve ist der Winkel  $j$  zwischen Normalenvektor  $n(s)$  der Kurve  $\alpha$  und Flächennormalenvektor  $f$  der Fläche  $F$  gleich null. Die Krümmung des Normalschnittes durch  $t$  ist  $1/R$ . Die Normalkrümmung  $k_n$  ist in diesem Fall gleich der Krümmung  $k(s)$  der Kurve  $\alpha$ .

Bei einer Drehung der Schnittebene um  $t$ , wächst der Winkel  $j$  und der Krümmungsradius  $1/k(s)$  der Schnittkurve ändert sich. Die Krümmungskreise aller ebenen Schnitte durch  $t$  liegen auf einer Kugel vom Radius  $R$ .

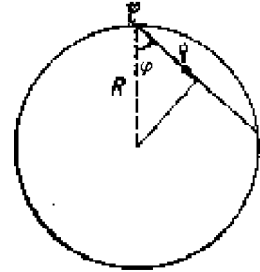


Abb.7

Der Satz von MEUSNIER zeigt, dass die Krümmung eines jeden durch  $t$  gehenden Schnittes der Fläche durch die Krümmung  $1/R$  des Normalschnittes bestimmt ist.

Definition: Sei  $a(s)$  eine natürlich parametrisierte Kurve der Fläche  $F$ ,  $p$  ein beliebiger Punkt der Fläche  $F$ . Die maximale Normalkrümmung  $k_1$  und die minimale Normalkrümmung  $k_2$  heißen Hauptkrümmungen in  $p$ .

Die beiden Hauptkrümmungen führen uns zu einem weiteren Krümmungsbegriff, der für die Betrachtung von Flächen entscheidend ist.

Definition: Das Produkt  $K$  der beiden Hauptkrümmungen heißt die GAUSSsche Krümmung einer Fläche. Den arithmetischen Mittelwert  $H$  bezeichnet man als mittlere Krümmung der Fläche im betreffenden Flächenpunkt.

$$K := k_1 \cdot k_2 \quad H := \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (14)$$

Das Vorzeichen der GAUSSschen Krümmung ist ausschlaggebend für die Struktur der Fläche in der Umgebung des betrachteten Flächenpunktes.

Mithilfe der GAUSSschen Krümmung kann man Flächenpunkte nach ihrer Krümmung klassifizieren:

Definition: Ein Punkt  $p$  einer Fläche  $F$  heißt

1. elliptisch, wenn  $K > 0$
2. hyperbolisch, wenn  $K < 0$
3. parabolisch, wenn  $K = 0$  mit  $k_1$  oder  $k_2 \neq 0$
4. Flachpunkt, wenn  $k_1 = k_2 = 0$



Ist die GAUSSsche Krümmung positiv, weisen beide Hauptkrümmungen dasselbe Vorzeichen auf. Das bedeutet, dass die Normalvektoren aller Kurven durch diesen Punkt zur selben Seite der Tangentialebene zeigen. Beispielsweise sind alle Punkte einer Sphäre elliptische Punkte.

In hyperbolischen Punkten haben die Hauptkrümmungen entgegengesetzte Vorzeichen, was dazu führt, dass auch Kurven durch  $p$  existieren, deren Normalenvektoren bei  $p$  nach beiden Seiten der Tangentialebene bei  $p$  zeigen.

Alle Punkte der sogenannten Pseudosphäre, mit  $K$  ist konstant  $-1$ , sind hyperbolische Punkte.

In einem parabolischen Punkt ist die GAUSSsche Krümmung Null, im Unterschied zu einem Flachpunkt ist aber eine der Hauptkrümmungen ungleich Null. Die Punkte eines Zylinders sind beispielsweise parabolische Punkte. Hier ist  $K$  stets 0 für alle Punkte der Erzeugenden.

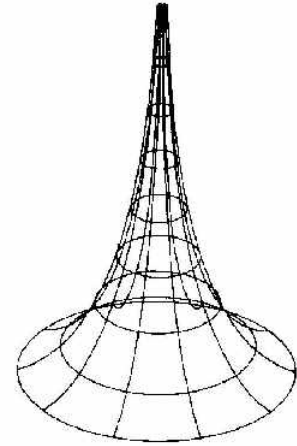


Abb. 8 : Pseudosphäre

Definition : Gilt für  $p \in F$ ,  $k_1 = k_2$ , so heißt  $p$  Nabelpunkt von  $F$ ; insbesondere sind Flachpunkte ( $k_1 = k_2 = 0$ ) Nabelpunkte. Betrachtet man eine Sphäre, so sind alle Punkte Nabelpunkte. Dasselbe gilt für die Punkte der Ebene. (Beweis siehe Kapitel 2.6.)

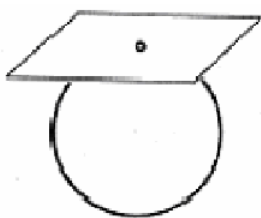


Abb. 9 elliptischer Punkt

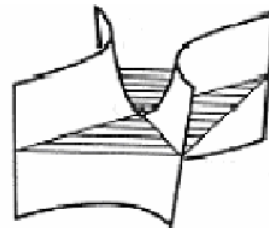


Abb. 10 hyperbolischer Punkt

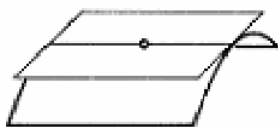


Abb. 11 parabolischer Punkt

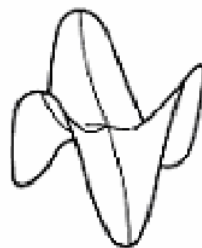


Abb. 12 Flachpunkt

Die Kenntnis der Hauptkrümmungen einer Fläche in einem Punkt  $p$  erlaubt es uns, leicht die Normalkrümmung der Fläche im Punkt  $p$  zu berechnen. Es gilt nämlich der

**Satz von EULER:** Schließt eine Richtung in einem Flächenpunkt, der kein Nabelpunkt ist, mit der zu der Hauptkrümmung  $k_1$  gehörenden Hauptkrümmungsrichtung den Winkel  $\varphi$  ein, so ist die zu dieser Richtung gehörende Normalkrümmung  $k_n$  durch

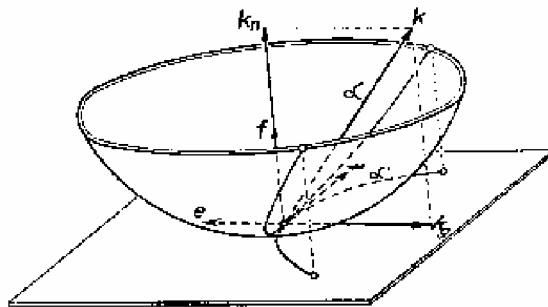
$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi \quad (15)$$

gegeben.

Einen Beweis des Satzes findet man bei Kreyszig ([17], Seite 162)

Eine weitere Definition eines Krümmungsmaßes stellt eine wichtige Größe zur Bestimmung der kürzesten Linien einer beliebigen Fläche dar:

Definition: Sei  $F: (u,v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow a(u,v)$  eine Fläche der Klasse  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , und  $\alpha(s)$  eine natürlich parametrisierte Kurve auf der Fläche  $F$ , ebenfalls der Klasse  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . Sei  $p$  ein beliebiger Punkt der Kurve  $\alpha$ . Projiziert man  $\alpha$  orthogonal in die zu diesem Punkt  $p$  gehörige Tangentialebene  $T(F)_p$  der Fläche  $F$ , so bezeichnet man diese Kurve als  $\alpha'$ . Die Krümmung dieser projizierten Kurve  $\alpha'$  im Punkt  $p$  heißt die geodätische Krümmung oder auch Tangentialkrümmung der Kurve  $\alpha$  im Punkt  $p$ . Sie wird mit  $k_g$  bezeichnet.



Wie zuvor festgestellt gilt:  $\overline{\mathcal{A}}(s) = k_g(s)(f(s) \times t(s)) + k_n(s)f(s)$ .

Durch Skalarmultiplikation mit  $f(s) \wedge t(s)$  ( $f(s) = n^+(s)$ ), erhält man

$$k_g(s) = \langle n^+(s) \times t(s), \overline{\mathcal{A}}(s) \rangle \quad (16)$$

Die geodätische Krümmung zeigt die Änderung des Winkels, den die Tangente an die Kurve mit einer parallelen Richtung längs der Kurve bildet. Im Fall der Ebene ist die parallele Richtung fest und die geodätische Krümmung reduziert sich auf die übliche Krümmung.

## 1.17. DER BEGRIFF DER GEODÄTISCHEN

Die „Geburt der Differentialgeometrie“ wird von W. Blaschke und H. Reichardt im Jahre 1678, lange vor den Forschungen von GAUSS angesetzt, als **Johann I. BERNOULLI** (1667-1748) die Aufgabe stellte, die „kürzesten Wege“ auf einer vorgeschriebenen krummen Fläche zu suchen ( [5], Seite 40 ). Eine Aufgabe, die auch in der Vermessung der Erde eine wichtige Rolle spielt.

Definition: Eine Flächenkurve, deren geodätische Krümmung  $k_g = 0$  ist, heißt geodätische Linie oder Geodätische der Fläche.

Eine Geodätische ist somit eine Flächenkurve, von der jeder genügend kleine Bogen eine kürzeste Verbindung ist. Wie anhand einer einfachen Überlegung dargestellt werden soll, ist nicht jede Geodätische im Kleinen auch im Großen die kürzeste Verbindung.

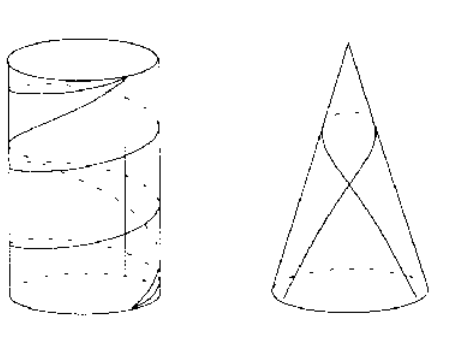


Abb. 14: Geodätische Linien auf einer Zylinderfläche und auf einer Kegelfläche

Betrachtet man einen Zylinder und verbindet zwei Punkte der Zylinderoberfläche mit einem Faden, so stellt der Verlauf des festgezogenen Fadens eine Geodätische der Fläche dar, die die zwei Punkte verbindet. Es gibt jedoch, abhängig von der Anzahl der Windungen um den Zylinder, viele Möglichkeiten, diesen Faden zu legen. Jedoch minimiert nur eine Möglichkeit die Länge zwischen den beiden Punkten. Entsprechendes gilt für den Kegel (siehe Abb. 12).

## 1.18. ABBILDUNG ZWEIER FLÄCHEN AUFEINANDER

Sei  $F: (u,v) \neq a(u,v)$  eine reguläre Fläche, die man auf eine beliebige andere Fläche oder Ebene  $\bar{F}$ , parametrisiert durch  $(\bar{u}, \bar{v}) \neq \bar{a}(\bar{u}, \bar{v})$ , abbilden möchte. Man kann jedem Punkt  $(u,v)$  der Fläche  $F$  einen Punkt  $(\bar{u}, \bar{v})$  der Fläche  $\bar{F}$  zuordnen:

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v)$$

Damit erhält man eine Abbildung  $F \rightarrow \bar{F}$ , die jede Kurve der Fläche  $F$  in eine Kurve der Fläche  $\bar{F}$  überführt.  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  sind Funktionen der Variablen  $u$  und  $v$ , wobei man beide Funktionen als eindeutig und stetig differenzierbar annimmt. Da nach Definition der regulären Fläche die Funktionaldeterminante stets ungleich null ist, ist die Abbildung umkehrbar. Betrachten wir die Kurve der Fläche  $F$  mit der Parametrisierung  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ , so geht diese in die Bildkurve  $\bar{u} = \bar{u}(u(t), v(t))$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(u(t), v(t))$  auf  $\bar{F}$  über. Im allgemeinen wird die Bogenlänge der Bildkurve  $\bar{s} = \int \frac{d\bar{s}}{ds} ds$  von der Bogenlänge der ursprünglichen Flächenkurve  $s = \int ds$  verschieden sein.

Der Quotient des Quadrats der ersten Ableitung, des sogenannten Bogenelements oder Bogendifferentials der Bildkurve und des der ursprünglichen Kurve

$$\frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \quad (17)$$

gibt das Maß der Längenverzerrung an, die auf die Kurven, die durch den Punkt  $a(u, v)$  gehen, wirkt.

Ist nun das Verhältnis  $d\bar{s}/ds = 1$ , so gilt auch  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$  und  $G = \bar{G}$ . Das bedeutet, dass alle Kurven der Fläche  $F$  „längentreu“ oder „isometrisch“ auf die Kurven der Fläche  $\bar{F}$  abgebildet werden. Man spricht von Abwicklung einer Fläche  $F$  auf  $\bar{F}$  oder Verbiegung von  $F$  in  $\bar{F}$ .

Betrachten wir allgemeiner den Fall, dass das Verhältnis  $d\bar{s}/ds$  unabhängig von der Fortschreitungsrichtung  $dv:du$  ist. Soll dies gelten, so existiert eine Funktion  $\lambda(u, v) \neq 0$

$$\text{mit } \frac{d\bar{s}}{ds} = \lambda(u, v).$$

Man erhält als Längenverzerrung:

$$\frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = c(u, v), \quad c = \lambda^2 = \text{konst} \quad (18)$$

Es müssten dann  $E, F, G$  proportional zu  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  sein, und zwar gilt  $\bar{E} = \lambda^2 E, \bar{F} = \lambda^2 F, \bar{G} = \lambda^2 G$ .

Eine Abbildung zweier Flächen aufeinander, die Gleichung ( 18 ) erfüllt, heißt konform oder winkeltreu. Letzteres deshalb, weil der Winkel zweier Flächenkurven unter Anwendung einer solchen Abbildung unverändert bleibt. Setzt man nämlich die Beziehungen  $\bar{E} = \lambda^2 E$ ,  $\bar{F} = \lambda^2 F$ ,  $\bar{G} = \lambda^2 G$  in die Formel ( 8 ) für den Winkel ein, so erhält man:

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\lambda^2 F}{\sqrt{\lambda^2 E \cdot \lambda^2 G}} = \frac{\lambda^2 F}{\lambda^2 \sqrt{EG}} = \frac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}} = \cos\bar{\varphi}$$

Da der Spezialfall  $\lambda = 1$  die längentreuen Abbildungen liefert, gilt der

**Satz 1.18.1: Jede längentreue Abbildung ist winkeltreu.**

Die dritte wichtige Größe, deren Verzerrung bei der Abbildung von Flächen betrachtet wird, ist der Flächeninhalt. Eine Abbildung, die das Flächenmaß erhält, nennt man flächentreu. Das Verhältnis des Flächenelements  $da$  und seines Bildes  $d\bar{a}$  muss in diesem Fall 1 sein:

$$\frac{d\bar{a}}{da} = 1$$

Aus der Berechnung des Flächeninhalts ( 9 ) erhalten wir:

$$\frac{d\bar{a}}{da} = \frac{\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} d\bar{u}d\bar{v}}{\sqrt{EG - F^2} du dv}$$

und als notwendige Bedingung für Flächentreue einer Abbildung somit

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = EG - F^2 \quad ( 19 )$$

Damit folgt unmittelbar der

**Satz 1.18.2.: Jede längentreue Abbildung ist flächentreu.**

Umgekehrt gilt folgender

**Satz 1.18.3.: Eine winkel- und flächentreue Abbildung ist auch längentreu.**

Dies gilt, da die Konstante  $\lambda$  einer winkeltreuen Abbildung, eingesetzt in die Bedingung für eine flächentreue Abbildung, 1 ergibt.

## 1.19. THEOREMA EGREGIUM von GAUSS

**Theorema egregium: Die Gauss'sche Krümmung  $K$  lässt sich durch die Koeffizienten der ersten Fundamentalform und ihren partiellen Ableitungen darstellen.  $K$  ist somit nicht von der Lage der Fläche im Raum, sondern nur von der ersten Fundamentalform der Fläche abhängig.**

Beweis: (nach Haack [11], Seite 70)

Betrachten wir den Ausdruck ( 10 ):  $k \cos \varphi = \bar{a}f = a_{uu} \bar{u}^2 + 2a_{uv} \bar{u}\bar{v} + a_{vv} \bar{v}^2$ .

Liegt statt der Bogenlänge  $s$  ein beliebiger zulässiger Kurvenparameter  $t$  vor, gilt für

$$k \cos j \text{ wegen } \bar{u} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{u'}{s'} \text{ und } \bar{v} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{v'}{s'}$$

$$k \cos \varphi = \frac{a_{uu} \bar{u}^2 + 2a_{uv} \bar{u}\bar{v} + a_{vv} \bar{v}^2}{(s')^2}$$

$$\text{und nach (11) und (13): } k \cos \varphi = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{1}{R} \quad (20)$$

Setzt man nun  $v : u = l$ , so ergibt sich für den Normalschnitt

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}$$

Möchte man die Extremwerte von  $1/R$ , also die Hauptkrümmungen für den Normalschnitt berechnen, multipliziert man den obigen Term aus und erhält:

$(E - RL) + 2(F - RM)l + (G - RN)l^2 = 0$ . Die quadratische Gleichung bestimmt zwei Fortschreitungsrichtungen  $l_1$  und  $l_2$  für jedes  $R$ . Für die Extremwerte von  $R$  fallen die Richtungen zusammen und  $l_1$  und  $l_2$  reduzieren sich auf einen Wert. Setzt man die Diskriminante Null, so ergeben sich die Extremwerte  $R_1$  und  $R_2$ :

$$(F - RM)^2 - (E - RL)(G - RN) = 0 / : R^2$$

$$\left( \left( \frac{1}{R} \right) F - M \right)^2 - \left( \left( \frac{1}{R} \right) E - L \right) \left( \left( \frac{1}{R} \right) G - N \right) = 0$$

Nach  $1/R$  ausmultipliziert erhält man

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{NE - 2MF + LG}{EG - F^2} + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0$$

$$\text{Nach VIETA gilt } K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (21)$$

Wegen (5) und (12) gilt  $L = (1/W) \cdot \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{uu} \rangle$ ,  $M = (1/W) \cdot \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{uv} \rangle$  und  $N = (1/W) \cdot \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{vv} \rangle$ , wobei  $W = \sqrt{EG - F^2}$ .

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left( \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{uu} \rangle \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{uv} \rangle - \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{vv} \rangle^2 \right)$$

Zu zeigen ist nun, dass der rechte Klammerausdruck durch die Koeffizienten der ersten Fundamentalform und ihren Ableitungen ausgedrückt werden kann.

Dazu betrachtet man folgende Ausdrücke in Determinantenschreibweise:

$$\langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{uu} \rangle \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{vv} \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_{vv} \\ \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_{vv} \\ \mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_{vv} \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$\langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{uv} \rangle \langle \mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_{uv} \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_{uv} \\ \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_{uv} \\ \mathbf{a}_{uv} \cdot \mathbf{a}_u & \mathbf{a}_{uv} \cdot \mathbf{a}_v & \mathbf{a}_{uv} \cdot \mathbf{a}_{uv} \end{vmatrix}$$

Differenziert man die Koeffizienten der ersten Fundamentalform, erhält man:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_u & E_u &= 2(\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_{uu}) & E_v &= 2(\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_{uv}) \\ F &= \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_v & F_u &= \mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_v + \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_{uv} & F_v &= \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_{vv} + \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_{uv} \\ G &= \mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_v & G_u &= 2(\mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_{uv}) & G_v &= 2(\mathbf{a}_v \cdot \mathbf{a}_{vv}) \end{aligned}$$

Alle skalaren Produkte der Determinanten sind somit durch E, F, G und ihre Ableitungen darstellbar, mit Ausnahme von  $\mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_{vv}$  und  $\mathbf{a}_{uv} \cdot \mathbf{a}_{vv}$ .

Diese beiden kommen nur, wie man durch Einsetzen der Determinanten in K sieht, kombiniert im Term  $(EG - F^2) (\mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_{vv} - \mathbf{a}_{uv} \cdot \mathbf{a}_{vv})$  vor.

Bildet man die Ausdrücke

$$(F_u - \frac{1}{2}E_v)_v = \mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_{vv} + \mathbf{a}_{uvv} \cdot \mathbf{a}_v \text{ und } \frac{1}{2}G_{uu} = \mathbf{a}_{uv} \cdot \mathbf{a}_{uv} + \mathbf{a}_{uvv} \cdot \mathbf{a}_v \text{ und subtrahiert diese,}$$

$$\text{erhält man } (F_u - \frac{1}{2}E_v)_v - \frac{1}{2}G_{uu} = \mathbf{a}_{uu} \cdot \mathbf{a}_{vv} - \mathbf{a}_{uv} \cdot \mathbf{a}_{uv}.$$

Aus dem Theorema egregium folgt als wichtige Anwendung der

**Satz 1.19.:** Zwei aufeinander längentreu abgebildete Flächen haben in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaß K.

## 1.20. DER SATZ VON GAUSS-BONNET und seine Anwendungen

Der Satz von GAUSS-BONNET ist einer der wichtigsten Sätze der Differentialgeometrie. Er besagt, dass der sogenannte Exzeß eines geodätischen Dreiecks  $T$  ( d.h. eines Dreiecks, dessen Seiten Stücke von Geodätischen sind ) gleich dem Integral der Gauss'schen Krümmung  $K$  über  $T$  ist. Dabei versteht man unter dem Exzeß von  $T$  die Differenz zwischen der Summe der Innenwinkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  von  $T$  und  $\pi$ . Mittels Formel ausgedrückt:

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K d\sigma \quad (22)$$

Die ursprüngliche Version des Satzes stammt von GAUSS. O.BONNET hat den Satz für Gebiete, die von sich nicht überschneidenden Flächenkurven berandet werden, verallgemeinert.

Eine wichtige Anwendung des Satzes liegt in der Bestimmung der Summe der Innenwinkel eines geodätischen Dreiecks auf einer beliebigen Fläche. Ist  $T$  ein geodätisches Dreieck auf der Fläche  $F$ . Bezeichnet man mit  $q_1, q_2, q_3$  die Außenwinkel und mit  $j_1 = q - p, j_2 = q - p, j_3 = q - p$  die Innenwinkel des geodätischen Dreiecks  $T$ , so gilt bei Anwendung des GAUSS-BONNET-Theorems:

$$\iint_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi$$

Beschreibt man dieselbe Formel mit Innenwinkel von  $T$ , dann ergibt sich:

$$\iint_T K d\sigma + \pi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \quad (23)$$

$$\iint_T K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i$$

Man sieht: Die Summe der Innenwinkel eines geodätischen Dreiecks ist  
 gleich  $\rho$ , falls  $K = 0$   
 größer  $\rho$ , falls  $K > 0$   
 kleiner  $\rho$ , falls  $K < 0$ .



Die Gaußsche Krümmung einer Fläche ist somit ausschlaggebend für die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf dieser Fläche. Wenn  $K \equiv 1$ , dann gilt  $\Sigma\varphi_i - \pi = \text{Flächeninhalt (T)} > 0$ . Auf einer Einheitssphäre ist somit die Summe der Innenwinkel eines geodätischen Dreiecks größer als  $\pi$ , und der Exzeß ist genau der Flächeninhalt von T.

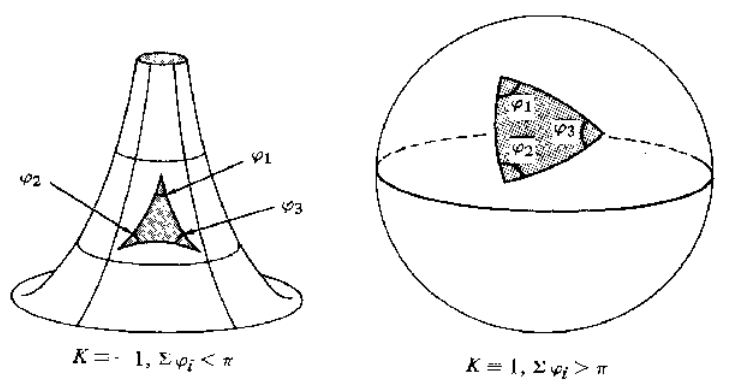


Abb. 15 Geodätisches Dreieck auf einer Pseudosphäre und auf einer Sphäre

## 2. SPHÄRISCHE GEOMETRIE

“ALS NUN, WER ES AUCH WAR VON DEN GÖTTERN,  
DAS WIRRE GEMENGE SO ZERTEILT UND GESCHIEDEN UND DANN  
ZU GLIEDERN GEORDNET, BALLTE ZUNÄCHST,  
DAMIT IHR GLEICHMASS FEHLE AN KEINER STELLE,  
DIE ERDE ER FEST ZUR GESTALT EINER MÄCHTIGEN KUGEL.”  
( Ovid, Metamorphosen, erstes Jahrzehnt n. Chr., [10], Seite 17 )

### 2.1. GESCHICHTE DER KUGELGEOMETRIE

Die Wurzeln der sphärischen Geometrie reichen ins 1. und 2. Jahrhundert n. Chr. zurück. Die Wissenschaft über die Kugel entstand in Verbindung mit der Astronomie, als griechische und alexandrinische Geometern und babylonische Astronomen versuchten, ihre Beobachtungen zu veranschaulichen.

Das älteste Schriftstück zur Himmelskugel stammt aus dem 4. vorchristlichen Jahrhundert, vom Astronom **AUTOLYCUS VON PITANE** (ca. 330 v. Chr.). In seinem Werk „*Über die sich bewegende Kugel*“ versuchte er eine mathematische Erfassung der Bewegungen des Himmels und griff Beziehungen zwischen den größten Kreisen, den Parallelkreisen und ihren Polen auf.

Um 325 v.Chr. schrieb **EUKLID** sein Werk „*Phainomena*“, in dem er Erkenntnisse von AUTOLYCUS aufgriff.

In den Forschungen dieser Zeit entstanden zur Untersuchung der Kugeloberfläche zwei Methoden: Die ältere, die bereits von den Ägyptern angewendet wurde, stützt sich auf geometrische Konstruktionen, wobei die Kugel auf drei senkrechte Ebenen projiziert wird. Die jüngere Methode ist von den Babyloniern ausgebildet worden. Dabei handelt es sich um eine Rechenmethode.

**HIPPARCH VON NICAEA**, der zwischen 161 und 126 v.Chr. auf Rhodos astronomische Beobachtungen anstellte, kannte und wendete beide Methoden an. Auf seine Forschungen gründete die sphärische Trigonometrie des **MENELAOS** (um 98 n.Chr., Alexandria) und die des **PTOLEMAIOS**, der um 100 – 170 n. Chr. in Alexandria lebte. Im 1. Jahrhundert n. Chr. schrieb **MENELAOS** die „*Sphärik*“, das älteste Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Es beinhaltet erstmals eine wirkliche sphärische Dreieckslehre, unabhängig von Astronomie und stereometrischer Sphärik, sowie die Formulierung und Beweise vieler Sätze, wie auch das heute noch als „Satz

des MENELAOS“ bezeichnete, wahrscheinlich aber auf HIPPARCH zurückgehende Theorem, das Grundlage für spätere Arbeiten kommender Mathematiker war.

Klaudius PTOLEMAIOS VON ALEXANDRIA wendete die Inhalte auf die Astronomie an. Sein Werk, der *Almagest*, diente astronomischen Untersuchungen; die rein mathematischen Kapitel waren nur Mittel zum Zweck.

Auf reges Interesse stieß die Kugellehre bei den indischen Mathematikern, die mithilfe von geometrischen Konstruktionen ein rechnerisches Verfahren ableiteten, das die Grundlage für die heutige Sinustrigonometrie darstellt. Die Sphärik wurde in indischen Schriften hauptsächlich in Regeln abgehandelt, Methoden wurden selten ausgeführt.

Die Wurzeln der vermehrten Beschäftigung europäischer Mathematiker mit der sphärischen Geometrie liegen nicht in Europa, sondern im Osten. Den Zündstein für die Beschäftigung mit der Trigonometrie legte **AL-FAZARI**, der 733 n. Chr. in Bagdad eine Übersetzung einer der indischen „Siddhantas“ herausgab. Der Araber **TABIT IBN KURRAH** (836-901 n. Chr., Bagdad) verfasste eine arabische Version der Werke des PTOLEMAIOS sowie einen Kommentar zu MENELAOS` Sphärik. Seine Schriften verbreiteten sich unter den ost- und westarabischen Mathematikern. Bereits im 9. Jahrhundert entdeckte der syrische Mathematiker und Astronom **AL-BATTÂNÎ** die Beziehungen des heutigen Seitenkosinussatzes und kannte den Sinussatz für rechtwinklige Dreiecke. In seinem Werke „*De scientia stellarum*“ benutzte er den sphärische Kosinussatz, ohne sich dessen bewusst zu sein.

Im 10. Jahrhundert fanden die Mathematiker und Astronomen **IBN IRAK VON CHORESM**, **ABÛ`L WAFÂ VON CHORASSAN** und **AL-CHODSHANDI VON CHODSHENT** fast zeitgleich den sphärischen Sinussatz. **ALHOGENDI** (um 970 n.Chr.), **ABU`LWAFÄ** (940-998 n. Chr.) und **ABU NASR** (um 960-1020 n. Chr.) verallgemeinerten den Sinussatz für schiefwinklige Kugeldreiecke. ABU`LWAFÄ definierte alle trigonometrischen Funktionen einheitlich am Kreis, im Gegensatz zur bisherigen Einführung am rechtwinkligen Dreieck.

**ALNAIRIZI** (922/23 n. Chr.) und etwas später ABU`LWAFÄ schufen zwei Theoreme, „Regel der vier Größen“ und „Tangentensatz“, die den Lehrsatz des MENELAOS in seiner Bedeutung ersetzten. Der Westaraber **GABIR IBN AFLAH** (zwischen 1140 und 1150 n.Chr., gestorben in Sevilla) fügte in seiner Abhandlung den vier Ptolemäischen Grundformeln am rechtwinkligen Dreieck eine fünfte hinzu. Von ihm sind, untypisch für arabische Schriften, viele Beweise seiner Sätze überliefert.

Der Winkelkosinussatz sowie die erste vollständige Darlegung der sphärischen Trigonometrie geht auf den im 13. Jahrhundert lebenden Aserbaidshaner **NASÎR-ED-DÎN AT-TÛSI** zurück.

Er stellte in seinem Werk „*Über die Figur der Schneidenden*“ der „alten“ Methode, der der Transversalensatz des Menelaos zugrunde lag, die „moderne“ Methode mit dem Sinussatz als fundamentalen Satz gegenüber. Es gelang ihm, Aufgaben am rechtwinkligen, wie am schiefwinkligen Dreieck vollständig zu lösen.

In Europa hielt die sphärische Trigonometrie erst nach dem Hochmittelalter Einzug. Ausschlaggebend waren vor allem die Durchsetzung des heliozentrischen Weltbildes und die zunehmende Bedeutung der Schifffahrt, die viele Entdeckungen ermöglichte.

**REGIOMONTANUS**, (1436-1476), mit bürgerlichem Namen Johannes Müller, ein Rechner, Instrumentenbauer, Drucker und Wissenschaftler aus Königsberg, prägte im 15. Jahrhundert Europas Wissenschaft in vielen Disziplinen. In der Sphärik stellte er Ptolemäus' *Almagest* mit den arabischen Schriften in Verbindung. 1464 schrieb er das Werk „*De triangulis omniodis libri quinque*“, das aufgrund seines großen Einflusses die Trigonometrie zu einer von der Astronomie unabhängigen Wissenschaft erhob, die sich in der Folge rasch entwickelte. Er schuf ein System der Trigonometrie, formulierte den allgemeinen Sinussatz und erstmals den allgemeinen Kosinussatz, starb jedoch vor Vollendung seines Werkes.

Sein geistiger Erbe war **Johannes WERNER** (1468 – 1528), Pfarrer, Astronom und Geograph. In seinem Werk „*Libri quatuor de triangulis sphaericis*“ formte er mithilfe der Formel  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$  den sphärischen Kosinussatzes um. Multiplikation und Division wurden fast ganz durch Addition und Subtraktion ersetzt, eine Methode, die später unter dem Namen Prosthaphairesis bekannt wurde. Sein Manuskript hatte Einfluss auf **RHAETICUS** (1514-1576), der es als Grundlage für sein Werk „*Opus Palatinum*“ verwendete, das ebenfalls unvollendet blieb.

Ein entscheidender Mann für die Sphärik war **Nikolaus KOPERNIKUS** (1473-1543), dessen heliozentrisches Weltbild sich auch gegen den Willen der mächtigen Kirche jener Zeit durchsetzte. Seine in dem Werk „*De revolutionibus orbium coelestium*“ entwickelte stereometrische Methode zur Anwendung der ebenen Trigonometrie bei der Herleitung sphärischer Sätze wurde von RHAETICUS weitergeführt.

Der Mathematiker **Francois VIETA** (1540-1603) formulierte im „*Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*“ (1593) seine neuen Erkenntnisse über die sphärische Geometrie wie die sechste, letzte Fundamentalformel am rechtwinkligen

Dreieck, eine kurze Formulierung des Kosinussatzes, den dritten Hauptsatz und die Benutzung der Reziprozitätsbeziehungen zwischen den allgemeinen Formeln am schiefwinkligen Dreieck, jedoch ohne Bekanntgabe der Ableitungen. Ein weiterer wichtiger Mann für die Entwicklung der Kugelgeometrie war der Engländer **John NAPIER** (1550-1617), auf den die nach ihm benannten Napierschen Regeln zur Berechnung für rechtwinkelige sphärische Dreiecke und die Logarithmentafel zurückgehen.

1626 schrieb **Albert GIRARD** (1595 – 1632) die Idee zur Verwendung des sphärischen Exzesses zur Berechnung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks nieder, wie **Bonaventura CAVALIERI** (1592 – 1647) es später in seinen Schriften „*Directorium Generale*“ (1632) und „*Trigonometria plana und et spherica*“ (1643) tat.

In den folgenden Jahrhunderten eroberte sich die sphärische Trigonometrie eine wichtige Stellung innerhalb der Mathematik. **Leonhard EULER** (1707 – 1783) spezialisierte 1758 Sätze über Eigenschaften kürzester Linien auf krummen Flächen für größte Kreise der Kugelfläche in den „*Principes de la trigonométrie sphérique*“. Für die Abhandlung des rechtwinkligen Dreiecks verkürzte er die Formelsammlung auf vier Formeln, auch eine Verkürzung auf drei deutete er an. Aber schon vor ihm, 1746, hatte **W. DE OPPEL** alle Formeln der sphärischen Trigonometrie aus drei, nämlich dem Sinussatz und den beiden Kosinussätzen, abgeleitet. **L. BERTRAND** (1731 – 1812) führte eine Ableitung der Formeln nur aus den Kosinussätzen aus und gelangte erst über den Seitenkosinussatz zum Sinussatz. **GAUSS** (1777-1855), **LAGRANGE** (1736-1813) und **Jean Paul de Gua de BALVES** schlugen einen ähnlichen Weg ein. **LAMBERT** (1728-1777) betrachtete den von Euler aufgewiesenen Zusammenhang der Formeln in der sphärischen und ebenen Trigonometrie. Andere an den von Euler initiierten Forschungen Beteiligte waren **LEXELL** (1740 – 1784, Petersburg) und **L'HULIER** (1752 – 1833, Paris). Weitere in diesem Zusammenhang wichtige Mathematiker sind **DELAMBRE** (1749 – 1822) und **MOLLWEIDE** (1774-1825).

Die beiden Mathematiker **MOEBIUS** (1790 - 1868) und **O. STOLZ** (1842 - 1905) schlossen in ihren Schriften das Gesamtgebiet der sphärischen Trigonometrie mithilfe der analytischen Geometrie ab. Einen entgültigen Schlusspunkt für die moderne sphärische Trigonometrie setzte **E. STUDY** 1893.

## 2.2. GRUNDBEGRIFFE

Definition: Die Sphäre oder Kugeloberfläche  $S$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $R$  ist die Menge aller Punkte  $P$  des Raumes, die vom Punkt  $M$  den festen Abstand  $R$  haben. Formal geschrieben  $S = \{P: |MP| = R\}$ .

Die Ebene  $\hat{U}$  mit dem Abstand  $d$  von  $M$  kleiner als  $R$  schneidet die Kugel in einem Kreis mit dem Radius  $r < R$ . Für  $R$ ,  $r$  und  $d$  gilt die Beziehung  $r^2 + d^2 = R^2$ .

Ist  $d = 0$ , bezeichnet man den Kreis als Großkreis (K), gilt  $0 < d < R$  bezeichnet man den Kreis als Kleinkreis (k). Da die Ebene bei  $d = 0$  durch den Mittelpunkt  $M$  der Sphäre geht, gilt: Genau alle Kreise der Sphäre, deren Mittelpunkt mit dem der Sphäre gleich ist, sind Großkreise.

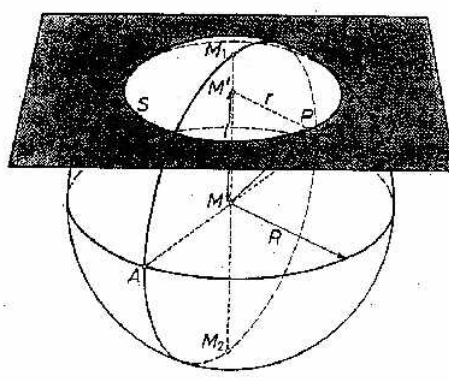


Abb. 16

Jeder Kugelkreis hat einen wahren Mittelpunkt  $M'$ , in dem der zu  $\hat{U}$  senkrechte Kugeldurchmesser die Ebene  $\hat{U}$  schneidet, und zwei sphärische Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$ , in denen der zu  $\hat{U}$  senkrechte Kugeldurchmesser die Sphäre  $S$  schneidet.

Die Gerade  $AM$ ,  $A \in K$ , trifft den Großkreis  $K$  neben  $A$  auch im Punkt  $A'$ , dem sogenannten Gegenpunkt oder diametralen Punkt zu  $A$ . Unmittelbar klar ist der folgende

**Satz 2.2.: Zwei verschiedene Großkreise  $K_1$  und  $K_2$  schneiden sich stets in Gegenpunkten.**

Betrachtet man zwei verschiedene, nicht diametrale Punkte  $A$  und  $B$  der Sphäre, so wird durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $M$  genau eine Ebene bestimmt. Deshalb gibt es genau einen Großkreis durch  $A$  und  $B$ , der durch die beiden Punkte in zwei Teile geteilt wird. Diese Teile nennt man Großkreisbögen.

Definition: Der sphärische Abstand  $|\widehat{AB}|$  zweier nicht diametraler Kugelpunkte A und B ist die Bogenlänge des kürzeren Bogens des Großkreises durch diese beiden Punkte. Durch zwei Punkte, die nicht Gegenpunkte voneinander sind, gehen neben genau einem Großkreis eine unendliche Anzahl Kleinkreise. Den Abstand misst man deshalb am Großkreis, da die auf der Sphäre gemessene Entfernung, führt man die Messung entlang des Großkreises durch, minimal wird. ( siehe Kapitel 2.2.2. und Kapitel 2.2.6. )

Der Großkreisbogen erfüllt damit auf der Kugel die Aufgabe der Strecke in der Ebene. Man bezeichnet ihn deshalb auch als Kugelstrecke. Der Großkreis K wird auch Kugelgerade genannt.

Da alle Großkreise den gleichen Radius R aufweisen, ist der sphärische Abstand zweier Punkte nur von R und dem Winkel  $\delta$  abhängig, wobei  $\delta$  der Mittelpunktswinkel  $\angle AMB$ , der Winkel zwischen den Radien dieser beiden Punkte, ist.

Somit gilt:

$$\frac{\widehat{AB}}{2R\pi} = \frac{\delta}{360^\circ} \quad \text{oder} \quad \widehat{AB} = R \frac{\pi}{180^\circ} \delta, \quad \text{für} \quad 0 < \delta \leq 180^\circ \quad \text{im Gradmaß und} \quad (24)$$

$$\widehat{AB} = R \frac{\delta}{\rho} = R \operatorname{arc} \delta \quad \text{im Bogenmaß.}$$

Da es bei mathematischen Grundbegriffen und Sätzen auf der Kugel in vielen Fällen nicht auf die Größe der Kugel ankommt, wird in der Literatur oft die Einheitskugel zur Betrachtung verwendet und der sphärische Abstand daher nur durch den entsprechenden Mittelpunktswinkel angegeben.

Der Abstand zweier diametraler Punkte A und A' ist gleich  $R\rho$ , der halbe Umfang des Großkreises durch die beiden Punkte. Die Lage der kürzesten Verbindung ist nicht eindeutig bestimmt, denn die Punkte M, A und A' bestimmen nur eine Gerade und jede Ebene, in der diese Gerade liegt, bestimmt einen Großkreis auf der Sphäre.

### 2.2.2. GEODÄTISCHE LINIEN

**Satz 2.2.2.:** Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Sphäre ist ein Großkreisbogen.

Beweis: (vergleiche [15], Seite 47)

Sei  $S: [a, b] \rightarrow S$  eine parametrisierte Kurve in  $S$  mit  $S(a) = A$  und  $S(b) = B$ .

In sphärischen Koordinaten lauten die Komponenten der Darstellung der Kurve:

$$x(t) = R \cos u(t) \cos v(t)$$

$$y(t) = R \sin u(t) \cos v(t)$$

$$z(t) = R \sin v(t)$$

Bildet man die Ableitungen nach  $t$ , ergibt sich:

$$x'(t) = R (-\sin u(t) \cos v(t) u'(t) - \cos u(t) \sin v(t) v'(t))$$

$$y'(t) = R (\cos u(t) \cos v(t) u'(t) - \sin u(t) \sin v(t) v'(t))$$

$$z'(t) = R (\cos v(t) v'(t))$$

Setzt man diese Ableitungen in die Berechnung der Länge einer allgemeinen Kurve ein,

$$l(\sigma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt, \text{ erhält man}$$

$$l(\sigma) = \int_a^b R \sqrt{\begin{aligned} &\sin^2 u(t) \cos^2 v(t) u'(t)^2 + \cos^2 u(t) \cos^2 v(t) u'(t)^2 + 2 \sin u(t) \cos v(t) \cos u(t) \sin v(t) u'(t) v'(t) \\ &- 2 \cos u(t) \cos v(t) \sin u(t) \sin v(t) u'(t) v'(t) + \cos^2 u(t) \sin^2 v(t) v'(t)^2 + \sin^2 u(t) \sin^2 v(t) v'(t)^2 \\ &+ \cos^2 v(t) v'(t)^2 \end{aligned}} dt$$

$$l(\sigma) = \int_a^b R \sqrt{v'(t)^2 + \cos^2 v(t) u'(t)^2} dt$$

$$\geq \int_a^b R v'(t) dt$$

$$= R(v(b) - v(a))$$

$$= R(\angle BCA) = \text{Länge der Kugelstrecke AB}$$

Die Länge der Kugelstrecke ist eindeutig bis auf  $u'(t) = 0$  oder  $\cos^2 v(t) = 0$  für alle  $t$ , d.h., falls  $S$  niemals den Großkreisbogen AB verlässt.



### 2.2.3. SPHÄRISCHES ZWEIECK

Die durch Satz 2.2. festgelegte Figur nennt man das Sphärische Zweieck, das also durch zwei Kugelgeraden gebildet wird. Es ist charakteristisch für die Kugelgeometrie, da in der Ebene zwei Geraden keine geschlossene Figur bilden können.

Schneiden sich zwei Ebenen, die durch die Punkte  $A$  und  $A'$  ( nicht diametral ) gehen und senkrecht auf die Ebene  $( A, A', M )$  stehen, in den Gegenpunkten  $M_1$  und  $M_2$ , entstehen Kugelgeraden, die auf der Sphäre einen Kugelstreifen begrenzen, das sogenannte sphärische Zweieck mit den Eckpunkten  $M_1$  und  $M_2$ . Die Kugel wird durch die zwei entstehenden Kugelgeraden in vier Teile zerteilt.

Da der Radius der Kugel festgelegt ist, wird das Kugelzweieck, abgesehen von seiner Lage, allein durch den Wert des Winkels  $\alpha$  zwischen den Ebenen  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  bestimmt. Die Länge der Seiten des Kugelzweiecks beträgt  $R\rho$ .

Es liegt die Frage nach dem Winkel zwischen den beiden Kugelgeraden  $K_A$  und  $K_B$  nahe, die uns auf den allgemeinen Winkelbegriff zwischen zwei Großkreisbögen führt.

Unter einem sphärischen Winkel wird ein Teil der Sphäre verstanden werden, der durch zwei von einem Punkt  $M_1$  ausgehende Kugelstrecken begrenzt wird. Der Winkel wird euklidisch gemessen, wobei man entweder den

- Neigungswinkel  $\alpha$  zwischen den beiden die Strecke beinhaltenden Ebenen  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  mißt

oder

- den Winkel der Tangenten an die entsprechenden Großkreise  $K_A$  und  $K_B$  im Punkt  $M_1$ .

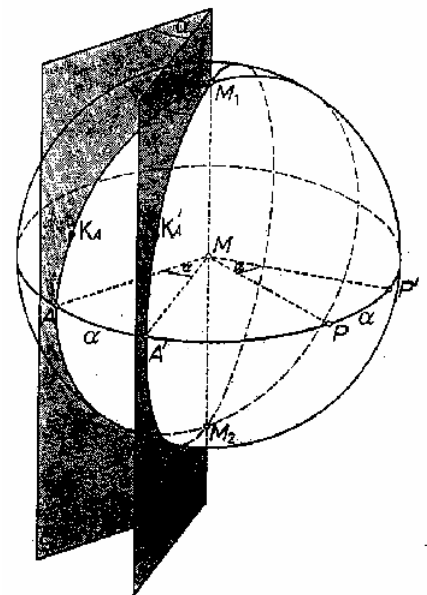


Abb. 17

Bei  $0^\circ$  und  $180^\circ$  fallen die beiden Großkreise in einen zusammen. Der Winkel  $\alpha$  ist somit auf die Werte  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  beschränkt. Man sieht: Die Großkreise  $K_A$  und  $K_B$  bilden in den Schnittpunkten  $M_1$  und  $M_2$  vier Winkel. Die Winkel, die sich jeweils gegenüberliegen, sind gleich groß und werden Scheitelwinkel genannt. Zwei nebeneinander liegende Winkel bezeichnet man als Nebenwinkel. Sie ergänzen sich zu  $180^\circ$ .

### Der Flächeninhalt des sphärischen Zweiecks

Betrachtet man den Flächeninhalt  $F_a$  des sphärischen Zweiecks mit dem Winkel  $a$ , so entspricht  $F_a$  bei  $a = 180^\circ$  der Fläche der Halbkugel, also  $F_{180^\circ} = 2R^2\rho$ . Daraus ergibt sich die Beziehung  $F_a : 2R^2\rho = a : 180^\circ$ . Für den Flächeninhalt  $F_a$  eines sphärischen Zweiecks mit dem Winkel  $a$  gilt somit

$$F_a = a \cdot \frac{R^2 \pi}{90^\circ} \quad (25)$$

### 2.2.4. SPHÄRISCHES DREIECK

Definition: Teile der Sphäre, die durch drei Geodätische begrenzt werden, bezeichnet man als sphärische Dreiecke.

Legt man drei den Mittelpunkt  $M$  enthaltende, nicht zusammenfallende Ebenen durch die Sphäre, schneiden sie die Oberfläche in drei Großkreisen. Die Großkreise schneiden sich in den Punktepaaren  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$ . Dabei wird die Kugeloberfläche in acht sphärische Dreiecke zerteilt. Je zwei sind kugelsymmetrisch, d.h. liegen zentralsymmetrisch zum Mittelpunkt  $M$ . Zeichnen wir für die weiteren Ausführungen ein Dreieck aus und betrachten  $\triangle ABC$  als Grunddreieck.

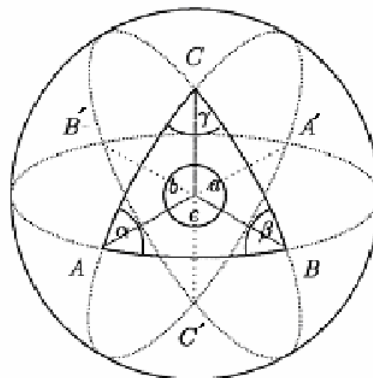


Abb. 18

Ein sphärisches Dreieck weist sechs Winkel auf. Die sphärischen Entfernungen der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  werden durch Mittelpunktswinkel  $a$ ,  $b$  und  $c$  festgelegt. Man nennt  $a$ ,  $b$ , und  $c$  die Seiten des sphärischen Dreiecks.

Die in den Eckpunkten von den Großkreisen erzeugten Innenwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  nennt man die Winkel des sphärischen Dreiecks.

Das Dreieck  $A'B'C'$ , das zu dem Grunddreieck  $ABC$  zentralsymmetrisch liegt, ist mit ihm in allen sechs Bestimmungsstücken übereinstimmend. Daraus kann man folgern, dass auch der Flächeninhalt gleich ist. Man bezeichnet das Dreieck  $A'B'C'$  als Scheiteldreieck des Dreiecks  $ABC$ .

Die Dreiecke  $A'BC$ ,  $AB'C$ ,  $ABC'$  heißen Nebendreiecke von  $ABC$ , die übrigen Dreiecke sind die Scheiteldreiecke der Nebendreiecke und zugleich Nebendreiecke von  $A'B'C'$ .

Die Großkreisbogen  $AB$ ,  $AC$  und  $BC$  sind als geodätische Linien die kürzeren Abschnitte der Großkreise, somit kleiner als  $180^\circ$ .

Eine besondere Klasse der sphärischen Dreiecke sind die sogenannten Eulerschen Dreiecke:

Definition: Ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten und Winkel kleiner als  $180^\circ$  sind, nennt man Eulersches Dreieck. Die Seiten- und Winkelsumme in einem Eulerschen Dreieck werden später erläutert.

#### DER FLÄCHENINHALT EINES SPHÄRISCHEN DREIECKS

Wie erwähnt liegen auf der Sphäre je zwei Dreiecke zentralsymmetrisch zueinander und weisen den gleichen Flächeninhalt auf.

$$\begin{aligned} \acute{o}ABC \text{ und } \acute{o}A'B'C' & \quad \acute{o}A'BC \text{ und } \acute{o}AB'C' \\ \acute{o}A'B'C \text{ und } \acute{o}ABC' & \quad \acute{o}AB'C \text{ und } \acute{o}A'BC' \end{aligned}$$

Die Dreiecke  $\acute{o}ABC$ ,  $\acute{o}A'BC$ ,  $\acute{o}A'B'C$  und  $\acute{o}AB'C$  ergeben zusammen die halbe Kugelfläche:

$$F_{\acute{o}ABC} + F_{\acute{o}A'BC} + F_{\acute{o}A'B'C} + F_{\acute{o}AB'C} = 2 \rho R^2 \quad (26)$$

Weiters ist ersichtlich, dass jeweils die zwei Dreiecke  $\acute{o}A'BC$  und  $\acute{o}ABC$ ,  $\acute{o}A'B'C$  und  $\acute{o}A'B'C'$  sowie  $\acute{o}AB'C$  und  $\acute{o}ABC$  ein Kugelzweieck bilden, das den Winkel  $a$ ,  $g$  und  $b$  einschließt. Für den Flächeninhalt des Kugelzweiecks mit dem Winkel  $j$  gilt nach

$$(25) \quad F_\alpha = \varphi \cdot \frac{R^2 \pi}{90^\circ}$$

Somit gilt  $F_{\acute{o}A'BC} + F_{\acute{o}ABC} = a \cdot \frac{R^2 \pi}{90^\circ}$

$$F_{\acute{o}A'B'C} + F_{\acute{o}A'B'C'} = b \cdot \frac{R^2 \pi}{90^\circ}$$

$$F_{\acute{o}AB'C} + F_{\acute{o}ABC} = g \cdot \frac{R^2 \pi}{90^\circ}$$

Setzt man nun diese Werte unter Berücksichtigung, dass  $F_{\acute{O}ABC} = F_{\acute{O}A'B'C'}$  gilt, in ( 26 ) ein, so erhält man:

$$F_{\acute{O}ABC} + a \cdot \frac{R^2\pi}{90^\circ} - F_{\acute{O}ABC} + b \cdot \frac{R^2\pi}{90^\circ} - F_{\acute{O}ABC} + g \cdot \frac{R^2\pi}{90^\circ} - F_{\acute{O}ABC} = 2 p R^2$$

$$F_{\acute{O}ABC} + \frac{R^2\pi}{90^\circ} (a + b + g) - 3 F_{\acute{O}ABC} = 2 p R^2$$

$$\Rightarrow F_{\acute{O}ABC} = \frac{R^2\pi}{180^\circ} (a + b + g) - p R^2 = \frac{R^2\pi}{180^\circ} (a + b + g - 180^\circ) =$$

$$= \frac{R^2\pi}{180^\circ} \mathfrak{E}, \text{ wobei } \mathfrak{E} = (a + b + g - 180^\circ) \quad ( 27 )$$

Man bezeichnet  $\mathfrak{E}$  als den sphärischen Exzeß des Dreiecks (siehe Kapitel 1.20). Er ist der Überschuss der Winkelsumme des sphärischen Dreiecks über die Winkelsumme des ebenen Dreiecks. Der sphärische Exzess E ist also proportional zur Fläche von  $\acute{O}ABC$ .

### 2.2.5. POLARDREIECK

Definition: Die sphärischen Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  eines Großkreises K nennt man Pole. K selbst heißt Polare von  $M_1$  und  $M_2$ . Die Polare ist der geometrische Orte aller Punkte, die von den Polen die sphärische Entfernung  $90^\circ$  haben.

Einen Pol, der beim Durchlaufen eines sphärischen Dreiecks ABC jeweils auf der linken Kugelhälfte der Kugelstrecke liegt, nennt man Linkspol, den jeweils auf der rechten Seite liegenden Pol Rechtspol.

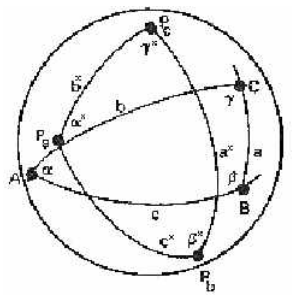


Abb. 19

Sei  $\acute{O}ABC$  ein sphärisches Dreieck. Jeder Großkreis AB, AC und BC hat einen Linkspol. Die Linkspole bezeichnen wir mit  $P_a$ ,  $P_b$  und  $P_c$ . Verbindet man nun die Pole mit geodätischen Linien, so erhält man ein neues sphärisches Dreieck. Man nennt  $\acute{O}P_aP_bP_c$  das Polardreieck von  $\acute{O}ABC$ . Seine Winkel werden mit  $a^*$ ,  $b^*$  und  $g^*$  und seine Seiten mit  $a^*$ ,  $b^*$  und  $c^*$  bezeichnet.

Zwischen den Bestimmungsgrößen des Grunddreiecks  $ABC$  und dessen Polardreieck  $P_aP_bP_c$  bestehen wichtige Zusammenhänge, die sich folgendermaßen anschaulich erklären lassen:

Betrachtet man einen Punkt  $Q$ , der das Grunddreieck  $ABC$  durchläuft, so dreht er sich in den Eckpunkten des Dreiecks jeweils um die Außenwinkel  $180^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ - \beta$  und  $180^\circ - \gamma$ . Läuft  $Q$  von  $A$  nach  $B$ , die Seite  $c$  entlang, so wandert der Pol  $P_c$  des Großkreises  $AB$  auf einem Großkreis nach Pol  $P_a$ . Der Großkreisabstand  $P_c P_a$  ist die Seite  $b^*$  des Polardreiecks.

$$\text{Somit gilt: } b^* = 180^\circ - \beta \quad (28)$$

Analog gilt für die Seiten  $a$  und  $c$ :

$$a^* = 180^\circ - \alpha, \quad c^* = 180^\circ - \gamma$$

Da  $A, B, C$  Linkspole der Seiten  $a^*, b^*$ , und  $c^*$  sind, gilt umgekehrt: (29)

$$a = 180^\circ - a^*, \quad b = 180^\circ - b^*, \quad c = 180^\circ - c^*$$

oder

$$a^* = 180^\circ - a, \quad b^* = 180^\circ - b, \quad c^* = 180^\circ - c$$

Damit erhalten wir folgenden Satz:

**Satz 2.2.5.:** Die Seiten eines Polardreiecks sind gleich den Supplementen der Winkel des Grunddreiecks. Die Winkel des Polardreiecks sind gleich den Supplementen der Seiten des Grunddreiecks.

Da ersichtlich gilt:

**Ist  $\triangle P_aP_bP_c$  das Polardreieck von  $\triangle ABC$ , so ist umgekehrt  $\triangle ABC$  das Polardreieck von  $\triangle P_aP_bP_c$ , so folgt auch die Umkehrung der Aussage von Satz 2.2.5.**

## DIE POLARITÄT AUF DER KUGEL

Die Zuordnung zwischen Kugeldreieck und Polardreieck, bei der eine Seite des Ausgangsdreiecks einer Ecke des Polardreiecks entspricht und umgekehrt, ist eine charakteristische Eigenschaft der Kugel. Man nennt diese Eigenschaft die Polarität auf der Kugel.

Die Polarität auf der Kugel ermöglicht es, für ein sphärisches Dreieck gültige Aussagen auf das Polardreieck zu übertragen und umgekehrt. Dadurch erhält man eine Probe für eine bekannte Formel oder einen einfachen Beweis für eine neue Formel. Das Polardreieck eines Eulerschen Dreiecks ist aufgrund der Beziehungen (28) und (29) wieder ein Eulersches Dreieck.

Einige wichtige Sätze im Zusammenhang mit der Polarität der Kugel:

**Satz 2.2.5.a:** Ist A Punkt der Sphäre und nicht Gegenpunkt vom Punkt B der Sphäre, so gelten folgende zueinander äquivalente Aussagen:

- (1) P ist Pol zum Großkreis AB.
- (2)  $|\widehat{PA}| = |\widehat{PB}| = 90^\circ$
- (3) Zwei beliebige verschiedene Großkreise PU und PV stehen senkrecht auf dem Großkreis AB.

Beweis: (vergleiche [6], Seite 12 ff)

(1)  $\supset$  (2): Da P Pol vom Großkreis AB ist, steht nach Definition des Pols die Gerade PM, mit M Mittelpunkt der Kugel, senkrecht auf die Ebene des Großkreises AB und somit auch senkrecht auf AM. Daraus folgt, dass Abstand  $|\widehat{PA}| = 90^\circ$ . Genauso gilt  $|\widehat{PB}| = 90^\circ$ .

(2)  $\supset$  (3): Laut Voraussetzung verlaufen die Geraden AM und BM in einer Ebene senkrecht zur Geraden PM. Da B nicht der Gegenpunkt A' von A, liegt der Großkreis AB ebenfalls in dieser Ebene, und somit hat jeder Punkt dieses Großkreises von P den sphärischen Abstand  $90^\circ$ . Legt man eine Tangente an den Großkreis AB, so steht sie (windschief) senkrecht zur Geraden PM. Schneiden sich die Großkreise PU und PB im Schnittpunkt U', so steht in diesem Punkt die Tangente AB senkrecht zur Geraden PM. Eine Tangente an den Großkreis PU in U' verläuft hingegen parallel zur Geraden PM, da  $|\widehat{PU'}| = 90^\circ$ . Im Punkt U' stehen die Tangenten somit senkrecht aufeinander. Daraus folgt, dass der Großkreis PU senkrecht auf dem Großkreis AB steht. Der Großkreis PV steht dementsprechend senkrecht auf den Großkreis AB.

(3)  $\supset$  (1): Da U nicht diametraler Punkt von V ist, schneiden sich die Ebenen, in denen die Großkreise PU bzw. PV liegen, in einer Geraden. Da laut Voraussetzung die Großkreise PU und PV senkrecht auf den Großkreis AB stehen, steht die Gerade senkrecht auf die Ebene des Großkreises AB. M und P, der Punkt, den beide Großkreise enthalten, liegen auf dieser Geraden. Somit ist P Pol vom Großkreis AB.  $\grave{a}$

Daraus folgt unmittelbar:

**Satz 2.2.5.b:** Zwei Großkreise, von denen einer durch einen Pol des anderen geht, stehen senkrecht aufeinander. Umgekehrt: Stehen zwei Großkreise senkrecht aufeinander, so geht jeder durch die Pole des anderen.

**Satz 2.2.5.c:** Liegen A und B auf der Polare von P, so gilt für den Abstand  $|\widehat{AB}| = \textcircled{R}APB$ .

Beweis: Das Zweieck APBP' wird bestimmt durch den Winkel  $\textcircled{R}APB$ . Nach Definition des sphärischen Winkelmaßes entspricht  $\textcircled{R}APB$  dem Neigungswinkel  $\alpha$  zwischen den die Großkreisbögen AP und BP beinhaltenden Ebenen  $E_1$  und  $E_2$ . Diese beiden Ebenen schließen offensichtlich in der Normalebene auf diese Ebenen durch den Mittelpunkt M den Winkel  $\alpha$  ein, den Mittelpunktswinkel  $\textcircled{R}AMB$ . Der Mittelpunktswinkel  $\textcircled{R}AMB$ , und somit  $\textcircled{R}APB$ , entspricht laut Definition dem sphärischen Abstand AB.

**Satz 2.2.5.d:** Der sphärische Abstand zweier Punkte und der Winkel ihrer Polaren ergänzen sich zu  $180^\circ$ .

Beweis: Sei P der Pol des Großkreises AB. Man bestimmt zwei weitere Punkte S und T auf dem Großkreis AB, indem man von A nach B hin im Abstand  $90^\circ$  S festlegt, von B nach A hin ebenfalls im Abstand  $90^\circ$  T. Nach Satz 2.2.5. a (2) gilt  $|\widehat{AP}| = |\widehat{BP}| = 90^\circ$ . Nach der Festlegung von S und T gilt  $|\widehat{AS}| = |\widehat{BT}| = 90^\circ$ . Daraus folgt wegen Satz 2.2.5.a, dass der Großkreis PS die Polare von A und der Großkreis PT die Polare von B bildet. Der Winkel  $\textcircled{R}SPT$  bezeichnet den Winkel der Polaren von A und B. Nach Satz 2.2.5.c gilt  $\textcircled{R}SPT = |\widehat{ST}|$ .

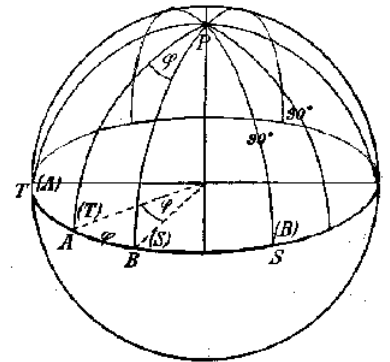


Abb. 20

Da der Abstand von A und B nicht festgelegt ist, müssen wir drei Fälle betrachten:

1.  $|\widehat{AB}| = 90^\circ$ : In diesem Fall gilt  $A = T$  und  $B = S \Rightarrow |\widehat{AB}| + \textcircled{R}APB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ .
2.  $|\widehat{AB}| < 90^\circ$ :  $|\widehat{ST}| = |\widehat{SA}| + |\widehat{AT}| = |\widehat{SA}| + |\widehat{BT}| - |\widehat{AB}| = 90^\circ + 90^\circ - |\widehat{AB}| = 180^\circ - |\widehat{AB}|$
3.  $|\widehat{AB}| > 90^\circ$ :  $|\widehat{ST}| = |\widehat{SA}| - |\widehat{AT}| = |\widehat{SA}| - |\widehat{AB}| + |\widehat{BT}| = 90^\circ - |\widehat{AB}| + 90^\circ = 180^\circ - |\widehat{AB}|$

Im ersten Fall ist der Satz offensichtlich richtig. Für den 2. und 3. Fall ergibt sich  $\textcircled{R}SPT + |\widehat{AB}| = 180^\circ$ ,

Mithilfe der Polarität der Kugel können wir nun die Winkel- und Seitensummen eines Eulerschen Dreiecks eingrenzen. In einem Eulerschen Dreieck liegt

- (1) die Seitensumme zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$
- (2) die Winkelsumme zwischen  $180^\circ$  und  $540^\circ$

Beweis:

(1) Offensichtlich gilt: Falls das sphärische Dreieck die maximale Ausdehnung der Halbkugel erreicht, dann gilt  $a + b + c = 360^\circ$ , falls es „in einem Punkt zusammenschrumpft“ gilt  $a + b + c = 0^\circ$ .

Der Beweis lautet: Betrachtet man das Grunddreieck ABC und sein Scheiteldreieck  $A'B'C'$ . Die Seite a ist eine Geodätische, also die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten B und C. Somit gilt  $|\widehat{CA'}| + |\widehat{A'B}| > a$ . Da  $|\widehat{CA'}| = 180^\circ - b$  und  $|\widehat{A'B}| = 180^\circ - c$ , wir erhalten  $180^\circ - b + 180^\circ - c > a$ .

Durch Umformung ergibt sich:  $a + b + c < 360^\circ$ .

(2) Aus der Berechnung des Flächeninhalts war schon ersichtlich, dass die Winkelsumme in einem Eulerschen Dreieck immer größer oder gleich  $180^\circ$  ist.

Beweis: Setzt man in (1) in die Gleichung die polaren Werte  $a = 180^\circ - a^*$ ,  $b = 180^\circ - b^*$  und  $c = 180^\circ - g^*$ , so erhält man

$$0 < 180^\circ - a^* + 180^\circ - b^* + 180^\circ - g^* < 360^\circ$$

$$0 < -(a^* + b^* + g^*) + 540 < 360^\circ \quad / - 540$$

$$-540 < -(a^* + b^* + g^*) < -180^\circ \quad / (-1)$$

$$180^\circ < a^* + b^* + g^* < 540^\circ$$

### 2.2.6. KRÜMMUNG DER SPHÄRE

Die Gaussische Krümmung einer Einheitssphäre ist  $K = 1$ . Was gilt jedoch für eine allgemeine Kugel mit dem Radius R?

Die erste Fundamentalform der Kugeloberfläche der Kugel mit dem Radius R lautet  $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2$ , die zweite Fundamentalform  $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = -R \cos^2 v du^2 - R dv^2$ .

Für eine nicht natürlich parametrisierte Kurve gilt nach ( 21 )

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$



Damit ist die Normalkrümmung der Kugel mit Radius  $R$  in allen Punkten

$$k_n = \frac{-R \cos^2 v du^2 - R dv^2}{R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2} = -\frac{1}{R}$$

Für die Gauss'sche Krümmung  $K$  gilt

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-R \cos^2 v \cdot (-R)}{R^2 \cos^2 v \cdot R^2} = \frac{1}{R^2}$$

$K$  ist also für alle Richtungen in allen Punkten gleich. Alle Punkte der Sphäre sind somit Nabelpunkte.

Die geodätische Krümmung des Breitenkreises  $j$  ist in allen Punkten nach ( 17 )

$$\begin{aligned} k_g &= \langle \mathbf{n}^+(s) \times \mathbf{t}(s), \mathbf{a}(s) \rangle, \\ &= |\mathbf{n}^+(s) \times \mathbf{t}(s)| \cdot |\mathbf{a}(s)| \cos(90^\circ - \varphi) \end{aligned}$$

$k_g$  ist genau dann 0, wenn  $j = 0^\circ$ . Dies trifft bei Meridianen zu. Durch Drehung des Koordinatensystems folgt die Aussage für beliebige Großkreise, und wir erhalten das schon bekannte Resultat: Auf der Sphäre sind alle Großkreise Geodätische.

## 2.3. DIE WICHTIGSTEN SÄTZE ZUR BERECHNUNG VON SPHÄRISCHEN DREIECKEN

### 2.3.1. DIE GRUNDFORMELN DER SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE

Für die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks ergeben sich sechs Grundaufgaben, wobei stets folgende drei Größen bekannt sind:

1. die drei Seiten  $a, b, c$
2. die drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$
3. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z.B.  $a, b, \gamma$
4. eine Seite und die anliegenden Winkel, z.B.  $c, \alpha, \beta$
5. zwei Seiten und ein Gegenwinkel, z.B.  $a, b, \alpha$
6. zwei Winkel und eine Gegenseite, z.B.  $\alpha, \beta, a$

Aufgrund der Polarität im sphärischen Dreieck reduzieren sich die sechs Grundaufgaben auf drei, da in der zweiten, vierten und sechsten Aufgabe die dem im Polardreieck entsprechenden Stücke des Ausgangsdreiecks gegeben sind.



Setzt man die Koordinaten gemäß den Gleichungen ( 30 ) und ( 31 ) ein und beachtet man, dass für die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  des Dreiecks ABC  $\alpha = 180^\circ - \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  gilt, erhält man

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$$

$$-\sin b \cos \alpha = \sin a \cos \beta \cos c - \cos a \sin c$$

$$\cos b = \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos \beta$$

Diese Formelgruppe liefert unmittelbar drei Sätze des sphärischen Dreiecks:

Die Gleichung  $\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$  lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Eine zyklische Vertauschung der Winkel und Seiten (  $a^{\text{TM}} b^{\text{TM}} c^{\text{TM}} a$  bzw.  $\alpha^{\text{TM}} \beta^{\text{TM}} \gamma^{\text{TM}} \alpha$  ) liefert den sogenannten

**Sinussatz: In einem sphärischen Dreieck gilt**

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$$

$$\sin b : \sin c = \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\sin c : \sin a = \sin \gamma : \sin \alpha$$

**Die Sinusse zweier Seiten verhalten sich zueinander wie die Sinusse der entsprechenden Winkel.**

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der Sinussatz im allgemeinen keine eindeutigen Lösungen gibt. Sind von einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel bekannt, beispielsweise  $a$ ,  $b$ , und  $\alpha$ , so berechnet man den Winkel  $\beta$  mithilfe des Sinussatzes folgendermaßen:

$$\sin \beta = \sin b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin a}$$

Falls  $\beta \neq 90^\circ$  liefert die Gleichung aufgrund der Sinuseigenschaft  $\sin \beta = \sin (180^\circ - \beta)$ , einen spitzen und einen stumpfen Winkel. Welcher nun in dem bestimmten Dreieck vorliegt, muss weiter untersucht werden.

Betrachten wir nun die dritte Gleichung  $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$  und führen wieder eine zyklische Vertauschung durch, so erhalten wir die drei Gleichungen des

**Seiten-Kosinussatz: In einem sphärischen Dreieck gilt**

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

**Der Kosinus einer Seite ist gleich dem Produkt der Kosinuse der beiden anderen Seiten addiert mit dem Produkt der Sinuse der beiden anderen Seiten und dem Kosinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels.**

Die Gleichung  $-\sin b \cos \alpha = \sin a \cos \beta \cos c - \cos a \sin c$  wird folgendermaßen umgeformt

$$\sin b \cos \alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos \beta \cos c$$

Anders als bei den vorhergehenden zwei Gleichungen stehen hier auf der linken Seite zwei Größen. Da keine Seiten oder Winkel des sphärischen Dreiecks besonders ausgezeichnet sind, kann man den Term  $\sin b \cos \alpha$  entsprechend umformen :

$$\sin b \cos \gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos b \cos a$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir aus den beiden Gleichungen schließlich eine Formelgruppe, die sechs Gleichungen umfasst und folgenden Satz bildet:

**Sinus – Kosinussatz: In einem sphärischen Dreieck gilt:**

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$$

$$\sin b \cos \gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta$$

$$\sin c \cos \alpha = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma$$

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha$$

$$\sin b \cos \alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta$$

$$\sin c \cos \beta = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma$$

Jede der Gleichungen enthält alle Seiten und zwei Winkel, somit fünf Stücke, wodurch eine leichte Merkregel nicht gefunden werden kann.

Wie beim Polardreieck angemerkt, können Sätze in polarer Übertragung bestätigt werden oder zu neuen Formeln führen. Führen wir dies für den von uns als ersten herbeigeführten Satz durch, indem wir die Seiten  $a, b, c$  und Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  durch die Seiten  $a^*, b^*, c^*$  und die Winkel  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$  des Polardreiecks ersetzen:

$$\sin \alpha : \sin \beta = \sin a : \sin b$$

$$\sin (180^\circ - a^*) : \sin (180^\circ - b^*) = \sin (180^\circ - \alpha^*) : \sin (180^\circ - \beta^*)$$

$$\sin a^* : \sin b^* = \sin \alpha^* : \sin \beta^*$$

Wir erhalten den Sinussatz für das Polardreieck, somit ist der Sinussatz zu sich selbst polar.

Bei den nächsten Sätzen wenden wir eine andere Vorgangsweise an. Wir formulieren den Satz in unmittelbarer Anwendung auf die Größen des Polardreiecks zunächst für das Polardreieck und erhalten durch Ersetzen die Formeln in den Winkeln und Seiten des ursprünglichen Dreiecks ausgedrückt.

Die erste Gleichung des Seiten-Kosinussatzes, angewendet auf des Polardreieck, ergibt:

$$\cos a^* = \cos b^* \cos c^* + \sin b^* \sin c^* \cos \alpha^*$$

Durch polare Übertragung erhält man:

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \cos (180^\circ - \beta) \cos (180^\circ - \gamma) + \sin (180^\circ - \beta) \sin (180^\circ - \gamma) \cos (180^\circ - a)$$

$$- \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Betrachtet man die Gleichung näher, erkennt man, dass sie dieselbe Form wie die ursprüngliche Gleichung des Seiten-Kosinussatzes aufweist, jedoch sind die Winkel mit den entsprechenden Seiten vertauscht. Man fasst daher das Formeltripel, das durch zyklische Vertauschung entsteht, unter der Bezeichnung Winkel-Kosinussatz zusammen:

**Winkel-Kosinussatz: In jedem sphärischen Dreieck gilt:**

$$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\cos \beta = - \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$

$$\cos \gamma = - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Betrachten wir die erste Gleichung des Sinus-Kosinussatzes. Sie liefert durch polare Übertragung

$$\sin a^* \cos \beta^* = \cos b^* \sin c^* - \sin b^* \cos c^* \cos \alpha^*$$

$$\sin (180^\circ - \alpha) \cos (180^\circ - b) = \cos (180^\circ - \beta) \sin (180^\circ - \gamma) - \sin (180^\circ - \beta) \cos (180^\circ - \gamma) \cos (180^\circ - a)$$

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir das Formeltripel:

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a$$

$$\sin \beta \cos c = \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \cos b$$

$$\sin \gamma \cos a = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \cos c$$

Führt man dieselbe polare Umformung bei der vierten Gleichung des Sinussatzes durch und wendet die zyklische Vertauschung an, erhält man ein weiteres Formeltripel:

$$\sin \alpha \cos c = \cos \gamma \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta \cos a$$

$$\sin \beta \cos a = \cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \cos b$$

$$\sin \gamma \cos b = \cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \cos c$$

Die erhaltenen sechs Gleichungen bilden den sogenannten

**Polaren Sinus-Kosinussatz: In jedem sphärischen Dreieck gilt**

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a$$

$$\sin \beta \cos c = \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \cos b$$

$$\sin \gamma \cos a = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \cos c$$

$$\sin \alpha \cos c = \cos \gamma \sin \beta - \sin \gamma \cos \beta \cos a$$

$$\sin \beta \cos a = \cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \cos b$$

$$\sin \gamma \cos b = \cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \cos c$$

Jede Beziehung enthält alle Winkel und zwei Seiten des sphärischen Dreieck.

Mithilfe des Sinussatzes kann man noch einen sechsten Formelsatz für die Berechnung sphärischer Dreiecke ableiten.

Ersetzt man in der ersten Gleichung des Sinus-Kosinussatzes,  $\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$ ,  $\sin a$  gemäß der Sinusformel durch  $\sin a = \sin b \sin \alpha / \sin \beta$ , erhält man  $\sin b \sin \alpha \cot \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$ .

Dividiert man die Gleichung nun durch  $\sin b$  ergibt sich

$$\sin \alpha \cot \beta = \cot b \sin c - \cos c \cos \alpha.$$

Auf gleichem Weg ergeben sich aus dem Sinussatz weiter fünf Gleichungen, die im Kotangenssatz zusammengefasst werden:

**Kotangenssatz: In jedem sphärischen Dreieck gilt:**

$$\sin \alpha \cot \beta = \cot b \sin c - \cos c \cos \alpha$$

$$\sin \alpha \cot \gamma = \cot c \sin b - \cos b \cos \alpha$$

$$\sin \beta \cot \gamma = \cot c \sin a - \cos c \cos \beta$$

$$\sin \beta \cot \alpha = \cot a \sin c - \cos c \cos \beta$$

$$\sin \gamma \cot \alpha = \cot a \sin b - \cos b \cos \gamma$$

$$\sin \gamma \cot \beta = \cot b \sin a - \cos a \cos \gamma$$

Eine „Merkregel“ oder Ausformulierung des Satzes in Worten stammt von GAUSS.

Schreibt man die erste Gleichung mit dem Produkt der beiden Kosinusse an

$$\cos c \cos \alpha = \cot b \sin c - \sin \alpha \cot \beta$$

erkennt man: „Das Kosinusprodukt der Innenstücke ist gleich dem Produkt aus dem Sinus der Innenseite und dem Kotangens der Außenseite, vermindert um das Produkt aus dem Sinus des Innenwinkels und dem Kotangens des Außenwinkels.“ ([27], Seite 247)

Durch polare Umformung erhält man wieder den Kotangenssatz. Er ist somit zu sich selbst polar.

## AUFLÖSUNG DES SPHÄRISCHEN DREIECKS

Mithilfe der gewonnenen Sätze können wir nun die sechs Anfangsaufgaben lösen:

	GEGEBENE GRÖSSEN	LÖSUNG MIT
1.	a, b, c	Seiten-Kosinussatz (danach Sinussatz)
2.	$\alpha, \beta, \gamma$	Winkel-Kosinussatz (danach Sinussatz)
3.	a, b, $\gamma$	Seitenkosinussatz (Kotangenssatz) (danach Sinussatz)
4.	c, $\alpha, \beta$	Winkel- Kosinussatz (Kotangenssatz) (danach Sinussatz)
5.	a, b, $\alpha$	Sinussatz (Seiten- Kosinussatz)
6.	$\alpha, \beta$ a	Sinussatz (Seiten-Kosinussatz)

Der Seiten-Kosinussatz wird auch Fundamentalsatz der Kugelgeometrie genannt, da man durch seine Anwendung, betrachtet man den Winkel-Kosinussatz als polare Übertragung des Seiten-Kosinussatzes, alle Berechnungen durchführen kann.

## 2.4. DAS RECHTWINKELIGE SPHÄRISCHE DREIECK

### 2.4.1. SPHÄRISCHER SATZ DES PYTHAGORAS

Ein wichtiger Satz, der bei der Herleitung der Neperschen Regeln in den folgenden Seiten zur Anwendung kommen wird, ist:

**Sphärische Satz von Pythagoras: Für ein sphärisches Dreieck mit dem rechten Winkel  $\gamma$  bei C gilt:  $\cos c = \cos a \cos b$ .**

Beweis: Aus dem Seiten- Kosinussatz  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$

erhält man unmittelbar unter Beachtung von  $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$$\cos c = \cos a \cos b$$

### 2.4.2. DIE NEPERSCHEN REGELN

Die Neperschen Regeln sind Formeln für die Berechnung eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, d.h. eines Dreiecks mit mindestens einem  $90^\circ$ -Winkel, die man aber für die Berechnung eines rechtseitigen sphärischen Dreiecks, also eines Dreiecks, das mindestens eine  $90^\circ$ -Seite aufweist, abwandeln kann. Sie können, indem man das rechtwinklige Dreieck als Spezialfall eines allgemeinen sphärischen Dreiecks auffasst, direkt aus den uns schon bekannten Sätzen abgeleitet werden. Eine andere Herleitung ergibt sich mithilfe der Figur des Pentagramma mirificum, wie es der Mathematiker **John NAPIER** oder **NEPER** (1550 – 1617), nach dem sie benannt sind, ursprünglich getan hat. Dieser Weg wird hier besprochen.

Das Pentagramma mirificum, übersetzt das „wunderbare Fünfeck“, ist ein sphärisches Fünfeck, das folgendermaßen gebildet wird:

Betrachten wir das rechtwinklige Kugeldreieck  $P_1Q_1P_2$ , mit dem rechten Winkel bei  $Q_1$ . Die drei Großkreise, auf denen die Seiten des Kugeldreiecks liegen,  $P_1Q_1$ ,  $P_2Q_1$  und  $P_1P_2$  bilden gemeinsam mit den beiden Polen  $P_1$  und  $P_2$  zwei sphärische Fünfecke  $P_1P_2P_3P_4P_5$  und  $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3\bar{P}_4\bar{P}_5$  (mit Ausnahme des Falls, dass  $P_1Q_1P_2$  ein gleichseitig-rechtwinkliges Dreieck ist).



Die so gebildeten Fünfecke weisen folgende Eigenschaften auf:

- Jede Seite des Fünfecks bildet eine Hypotenuse für ein darüberliegendes rechtwinkeliges sphärisches Dreieck. Wir bezeichnen mit  $Q_1, \dots, Q_5$  bzw.  $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_5$  die Ecken der sphärischen Dreiecke über den Seiten des Fünfecks.

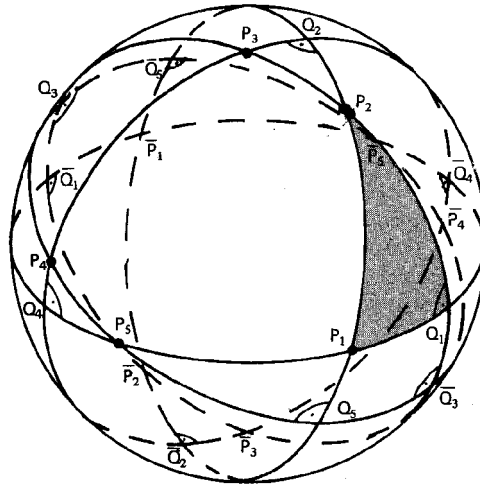


Abb. 23

- Jeder Eckpunkt ist Pol zu dem Großkreis, der die gegenüberliegende Seite dieses Fünfeck enthält.

Beweis für das Fünfeck  $P_1P_2P_3P_4P_5$ : Der Großkreis  $P_3P_4$  ist Polare zu  $P_1$ , somit bildet  $P_1$  den Pol der Seite  $P_3P_4$ . Dasselbe gilt für den Großkreis  $P_4P_5$  der nach Voraussetzung Polare zu  $P_2$  ist. Nach Satz 2.2.5.b entstehen sich bei  $Q_2$  und  $Q_4$  bzw. bei  $Q_3$  und  $Q_5$  rechte Winkel. Dadurch ist laut Satz 2.2.5.a  $P_3$  Pol zum Großkreis  $P_1P_3$  und  $P_4$  Pol zum Großkreis  $P_1P_2$  und  $P_5$  Pol zum Großkreis  $P_2P_3$ .

Ein sphärisches Fünfeck mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als Pentagramma mirificum.

- Weiters wird jeder Großkreis durch acht Schnittpunkte mit anderen Großkreisen in acht Teile zerteilt. Diese Teile haben die Eigenschaft, dass je zwei aufeinanderfolgende zusammen eine Länge von  $90^\circ$  aufweisen, während die vier nicht aneinandergrenzenden Teile eines Großkreises gleich lang sind.

Aufgrund dieser Eigenschaften kann man alle Stücke auf den Großkreisen  $P_1Q_1$ ,  $Q_1P_2$  und  $P_1P_2$  bestimmen. Außerdem grenzen zwei Großkreise, die durch einen Pol gehen, auf der dazugehörigen Polaren einen Bogen ab. Die Länge dieses Bogens entspricht der Größe des Winkels, den die beiden Großkreise am Pol über diesem Bogen einschließen. Somit erhält man auch alle anderen Bogenlängen und Winkelgrößen der Sphäre aus den Größen des Dreiecks  $P_1Q_1P_2$ .

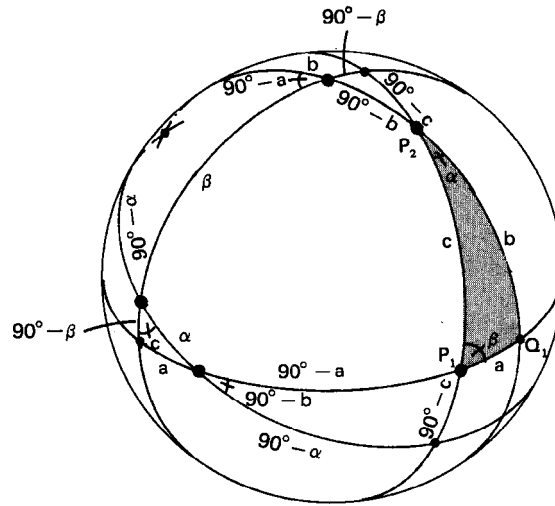


Abb. 24

Betrachten wir nun die fünf rechtwinkligen Dreiecke über den Fünfeckseiten näher. In jedem Dreieck treten die fünf Größen  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\beta$  bzw. deren Komplemente aus dem Ausgangsdreieck  $P_1Q_1P_2$  in der gleichen Reihenfolge auf. Jede Größe bezeichnet genau einmal die rechte Kathete, die linke Kathete, den linken Basiswinkels, die Hypotenuse und den rechten Basiswinkels.

Die Anwendung des sphärischen Satz des Pythagoras auf diese Dreiecke liefert folgende Beziehungen:

- |   |               |                                                                                                 |
|---|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | ó $P_1Q_1P_2$ | $\cos c = \cos a \cos b$                                                                        |
| 2 | ó $P_2Q_2P_3$ | $\cos (90^\circ - b) = \cos (90^\circ - c) \cos (90^\circ - \beta) = \sin c \sin \beta$         |
| 3 | ó $P_3Q_3P_4$ | $\cos \beta = \cos b \cos (90^\circ - \beta) = \cos b \sin \alpha = \sin (90^\circ - b) \sin a$ |
| 4 | ó $P_4Q_4P_5$ | $\cos \alpha = \cos (90^\circ - \beta) \cos a = \sin \beta \cos a = \sin b \sin (90^\circ - a)$ |
| 5 | ó $P_5Q_5P_1$ | $\cos (90^\circ - a) = \cos (90^\circ - \alpha) \cos (90^\circ - c) = \sin \alpha \sin c$       |

Drückt man nun in der dritten und vierten Gleichung  $\cos b$  und  $\cos a$  aus

$$\cos b = \cos \beta / \sin \alpha$$

$$\cos a = \cos \alpha / \sin \beta$$

und setzt diese Ausdrücke in die erste Gleichung ein, ergibt sich

$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta.$$

Diese Gleichung können wir nun auf die fünf rechtwinkligen Dreiecke über den Seiten des Pentagramma mirificum anwenden, womit sich fünf Gleichungen ergeben:

$$6 \quad \cos c = \cot \alpha \cot \beta$$

$$7 \quad \cos (90^\circ - b) = \cot (90^\circ - a) \cot \alpha = \tan a \cot \alpha$$

$$8 \quad \cos \beta = \cot c \cot (90^\circ - a) = \cot c \tan a$$

$$9 \quad \cos \alpha = \cot (90^\circ - b) \cot c = \tan b \cot c$$

$$10 \quad \cos (90^\circ - a) = \cot \beta \cot (90^\circ - b) = \cot \beta \tan b$$

Ein Vergleich dieser insgesamt zehn Gleichungen für rechtwinkelige sphärische Dreiecke zeigt, dass auf der rechten Seite alle möglichen Paare von den fünf Stücken  $b$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\beta$ ,  $a$  einmal in einer Gleichung auftreten. Mithilfe dieses Formelsatzes kann man somit, wenn zwei Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks bekannt sind, mit gewissen Einschränkungen alle anderen Stücke des Dreiecks angeben.

Man fasst die zehn Gleichungen in der sogenannten Neperschen Regel zusammen.

**Nepersche Regel: In rechtwinkligen sphärischen Dreiecken gilt, wenn man den rechten Winkel nicht mitzählt und für die Katheten deren Komplemente setzt:**

**Der Kosinus eines jeden Stückes ist**

**gleich dem Produkt des Kotangens der benachbarten Stücke und**

**gleich dem Produkt der Sinusse der nicht benachbarten Stücke.**

(„benachbart“ heißt: in der zyklisch angeordneten Reihenfolge  $b$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\beta$ ,  $a$  nebeneinander stehend).

- |                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| 1. $\sin a = \sin a \sin c$ | 6. $\sin a = \tan b \cot b$  |
| 2. $\sin b = \sin b \sin c$ | 7. $\cos c = \cos a \cos b$  |
| 3. $\cos a = \tan b \cot c$ | 8. $\cos a = \cos a \sin b$  |
| 4. $\cos b = \tan a \cot c$ | 9. $\cos b = \cos b \sin a$  |
| 5. $\sin b = \tan a \cot a$ | 10. $\cos c = \cot a \cot b$ |

Die zehn Formeln gelten jedoch auch für das rechtseitige Dreieck, denn durch den polaren Übergang wird der polare Winkel, der der  $90^\circ$  - Seite entspricht, ein rechter, womit wieder ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck entsteht.

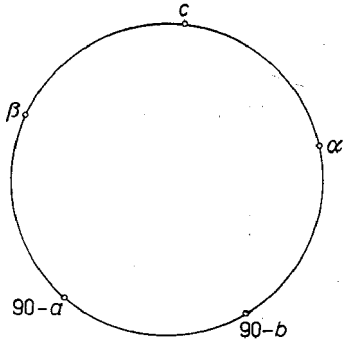


Abb. 25

Für die Berechnung ist folgende Betrachtung sinnvoll. Man ordnet die durch Auslassung des rechten Winkels fünf Stücke des Dreiecks in ihrer zyklischen Reihenfolge auf einem Kreis an, wobei man die Katheten durch ihre Komplemente ersetzt. Zu dem gegebenen und gesuchten Element sucht man sich das mittlere, das die dritte Größe bildet, und wendet die Nepersche Regel an.

#### BEISPIEL 8:

- Sind  $a$  und  $b$  gegeben, und  $c$  das gesuchte Element, so ist das mittlere Element der beiden ebenfalls  $c$ . Nach der Neperschen Regel gilt:  $\cos c = \cot b \cot a$ .
- Sind  $a$  und  $\alpha$  gegeben und  $c$  das gesuchte Element, so ist das mittlere Element  $a$  und es gilt:  $\cos (90-a) = \sin c \sin \alpha \Rightarrow \sin a = \sin c \sin \alpha \Rightarrow \sin c = \sin a / \sin \alpha$

### 2.5. VERGLEICH MIT EUKLIDISCHER GEOMETRIE

Es stellt sich die Frage, inwieweit man sphärische und euklidische Geometrie vergleichen kann beziehungsweise wie groß die Unterschiede sind. Betrachten wir dazu folgende Beispiele:

BEISPIEL 9: Hat man ein sphärisches Dreieck mit drei rechten Winkeln vorliegen, so ist es auch gleichseitig. Die Seitenlängen erhält man aus dem Winkel-Kosinussatz:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\cos 90 = -\cos 90 \cos 90 + \sin 90 \sin 90 \cos a$$

$$\cos a = 0 \supset a = 90^\circ \text{ oder } \frac{\pi}{2}$$

Analog gilt  $b = c = \frac{\pi}{2}$ . Betrachtet man nun in der Ebene ein gleichseitiges Dreieck mit

den Seitenlängen  $\frac{\pi}{2}$ , so sind dessen Winkel gleich  $60^\circ$ .

In Bezug auf die Winkel liegt also ein gewaltiger Unterschied vor.

## BEISPIEL 10: Kleine Dreiecke auf der Erdoberfläche

Vergleichen wir das Flächenmaß eines gleichseitigen Kugeldreiecks und eines gleichseitigen ebenen Dreiecks mit der Seitenlänge von 60km (entspricht  $0,5396^\circ$ ):

Das Kugeldreieck hat nach dem Seiten-Kosinussatz den Winkel

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos a \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin a} = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a} = 0,499988913264$$

$$\alpha = 60,0007334899^\circ$$

$$F_{\text{Kugeldreieck}} = \frac{R^2\pi}{180^\circ} \alpha = \frac{6371^2\pi}{180^\circ} \cdot 0,0022004696^\circ = 1558,863 \text{ km}^2$$

Setzt man dieselben Größen, Seitenlänge 60 km und Winkel  $\alpha = 60,0007334899^\circ$  in die

Formel zur Flächenberechnung von ebenen Dreiecken  $F'_{\text{ebenes Dreieck}} = \frac{bc}{2} \cos\alpha$  ein, ergibt sich

folgender Wert:  $F'_{\text{ebenes Dreieck}} = 1558,857 \text{ km}^2$ .

Die beiden Flächeninhalte unterscheiden sich um 0,0007% der Fläche des sphärischen Dreiecks. Aufgrund dieser geringen Differenzen werden in der Geodäsie Flächeninhalte sphärischer Dreiecke mit den gemessenen Größen wie ebene Dreiecke behandelt. Kriterium dafür ist, dass der Exzeß  $\epsilon < 10''$  ist, was im Allgemeinen aussagegleich mit „Dreiecksseite  $a$  kleiner als 60 km“ ist, dh.  $a/R < 1/100$ . Solche Dreiecke bezeichnet man als „kleine Dreiecke.“

Die folgenden zwei Sätze beschreiben zwei Verfahren, die dazu benutzt werden, aus gegebenen Stücken eines kleinen sphärischen Dreiecks mithilfe der Trigonometrischen Formeln der Ebene die gesuchten Stücke zu berechnen:

**Satz von LEGENDRE:** Vermindert man unter Beibehaltung der Seitenlängen die Winkelgrößen eines kleinen Dreiecks um jeweils  $1/3$  des sphärischen Exzesses, so kann es nach den Trigonometrischen Formeln in der Ebene berechnet werden.

**Satz von SOLDNER (SOLDNERScher Additamenten-Satz):** Vermindert man unter Beibehaltung der Winkelgrößen die Seitenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eines kleinen Dreiecks jeweils um die Additamente  $\frac{a^3}{6R^2}$ ,  $\frac{b^3}{6R^2}$ ,  $\frac{c^3}{6R^2}$ , so kann es nach den Trigonometrischen Formeln der Ebene berechnet werden.

Beweise der Sätze finden sich in Bigalke [ 6 ], Seite 51ff und Sigl [ 27 ], Seite 403ff.

## 2.6 ANWENDUNGEN IN DER MATHEMATISCHEN GEOGRAPHIE

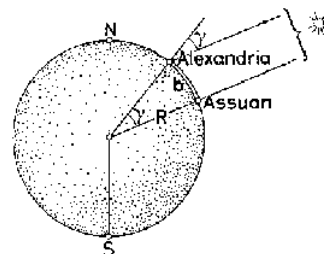
### 2.6.1. GESTALT UND GRÖÖE DER ERDE

#### DIE ERDE ALS KUGEL

Die ursprüngliche Vorstellung der Naturvölker, dass die Erde eine Scheibe sei, wurde schon im Altertum durch einfache Beobachtungen in Frage gestellt. Hinweise ergaben sich durch die Betrachtung von Schiffen, die sich der Küste nähern, wobei ihr Mast aufgrund der Erdrundung zuerst sichtbar wird oder durch den kreisförmigen Erdschatten bei Mondfinsternissen auf der Mondscheibe. PTOLEMAIOS verwendete die Beobachtung des Nachthimmels an Stellen unterschiedlicher geographischer Länge und Breite im Almagest als Beweis für die Kugelgestalt der Erde:

„Wäre die Erde flach von Osten nach Westen, würden die Sterne für Westler und Orientalen zur selben Zeit aufgehen. Das ist jedoch nicht der Fall. Wäre die Erde von Norden nach Süden, und umgekehrt, flach, würden die für einen Betrachter stets sichtbaren Sterne [Zirkumpolarsterne] immer dieselben sein, wohin er auch ginge. Das ist ebenfalls falsch. Die Erde scheint nur flach, weil sie so groß ist.“ ( [30] , Seite 19 )

Die erste wissenschaftlich belegte Berechnung zur Größe der Erde, die Bestimmung des Erdumfangs, gelang **ERATOSTHENES** (276 – 195 v.Chr.), dem Vorsteher der Bibliothek in Alexandria. Er bestimmte an dem Tag, an dem in Syene (dem heutigen Assuan), die Sonne im Zenit steht, in Alexandria den Winkel zwischen der Sonnenrichtung und der Vertikalen. Syene liegt ziemlich genau südlich von Alexandria (3° Abweichung).



Der Winkel zwischen den Vertikalen in Alexandria und Syene betrug 7,2°, ein Fünfzigstel des Vollkreises.

Somit musste der Gesamtumfang der Erde das 50fache der Distanz von Alexandria und Assuan, die er mit 5 000 Stadien annahm (1 Stadionmaß = 164m), betragen, also 41 000km. Das ist eine Abweichung von 2,42%, nimmt man 40 030,1736 km als mittleren Erdumfang.

### DIE ERDE ALS ROTATIONSELLIPSOID

Newton's Gravitationsgesetz (um 1670) veränderte erneut die Ansichten über die Gestalt der Erde. Als Folge der durch die Erdrotation auftretenden, zum Äquator hin sich verstärkenden Zentrifugalkräfte ergibt sich als Gestalt der Erde ein Rotationsellipsoid, was um 1736 durch Messungen von französischen Wissenschaftlern in Ecuador und in Lappland bestätigt wurde. Nach einem ersten von BESSEL um 1840 errechneten Erdellipsoids entstanden eine Vielzahl von Ellipsoiden, die als Bezugskörper benutzt wurden.

Erdmaße nach	Große Halbachse a	Kleine Halbachse b	Abplattung $f=(a-b)/a$
Bessel 1841	6377397 m	6356079 m	1: 299,15
IUGG 1980	6378137 m	6356752 m	1 : 298,26

1979 wurde in Canberra/Australien von der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik (IUGG) ein neues „Geodätisches Bezugssystem 1980“ ernannt, dass in den Dimensionen dem „World Geodetic System 1984 (WGS 84)“ entspricht. Darauf stützt sich das Global Positioning System (GPS).

### DIE ERDE ALS GEOID

Neben den mathematischen Modellen gibt es auch eine physikalische Definition der Erdgestalt, wobei der Begriff der Gestalt der Erde folgendermaßen definiert wird. GAUSS 1828 zur Gestalt der Erde :„Was wir im geometrischen Sinn Oberfläche der Erde nennen, ist nichts anderes als diejenige Fläche, welche überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet, und von der die Oberfläche des Meeres einen Teil ausmacht.“ ( [3], Seite 19 ) Bestimmt man die Lotrichtung, d.h. die Richtung der Schwerkraft, nach der sich die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit stellt, für sehr viele Punkte der Erde, entsteht eine ellipsoidähnliche, schwach gewellte Fläche, die von allen Lotrichtungen senkrecht durchstoßen wird. Diese Niveaufläche, die durch die ruhende vom Einfluss der Gezeiten und des Windes befreite Oberfläche des Meeres gebildet wird, die man sich unter den Kontinenten fortgesetzt denkt, wird nach LISTING (1873) als „Geoid“ bezeichnet. Die Abweichungen, Geoidundulationen, vom Rotationsellipsoid betragen z.B. beim Ellipsoid WGS-84 um +70/-100 m.

2.6.2. GEOGRAPHISCHE KOORDINATEN AUF DER ERDKUGEL

In der Darstellung der Erdkugel werden geographische Koordinaten verwendet – ein bereits von den Griechen benutzten System sphärischer Polarkoordinaten mit genormten Bezeichnungen. Der Großkreis, dessen Ebene senkrecht zur Rotationsachse NS der Erde durch den Erdmittelpunkt liegt, nennt man Äquator. Ein Punkt auf der Erdoberfläche wird durch zwei Winkel bestimmt:

- dem Winkel  $l$  zwischen dem Meridian durch P und dem einmal festgelegten Nullmeridian.  $l$  nennt man auch geographische Länge von P bezüglich des Nullmeridians.
- dem Winkel  $j$ , dem sphärischen Abstand auf dem Meridian durch P vom Äquator oder vom Pol, als Bogen oder Zentriwinkel mit  $j$  oder  $d$  ( $d = 90^\circ - j$ ) am Kugelmittelpunkt gemessen.  $j$  nennt man die geographische Breite des Punktes.

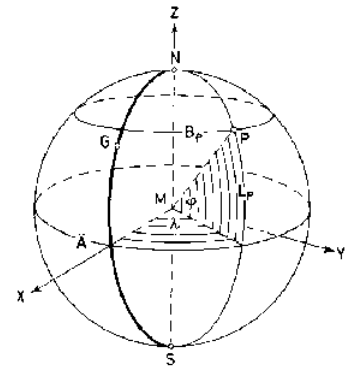


Abb. 27

Die Breitenkreise, parallel zum Äquator verlaufend, werden vom Äquator ausgehend polwärts in Winkelwerten von  $0^\circ$  bis  $\pm 90^\circ$  als nördliche (+) bzw. südliche (-) geographische Breite  $j$  bezeichnet. Die Meridiane (Längengrade) verlaufen durch deren sphärische Mittelpunkte oder Pole, die als Nordpol und Südpol bezeichnet werden, wobei sie die Breitenkreise im rechten Winkel schneiden. Die geographische Länge  $l$  der Meridiane wird vom 1884 international vereinbarten Nullmeridian in Greenwich aus westlich und östlich bis jeweils  $180^\circ$  bezeichnet.

Die beste Annäherung der Kugelgestalt an die Erde ist die dem Erdellipsoid etwa oberflächen- und volumsgleichen Kugel mit dem Radius  $R = 6371$  km. Nach dem Besselschen Erdellipsoid volumsgleiche Kugel ( Daten aus: [12], Seite 34 )

Bogenlänge eines Großkreises	$= 2R\rho = 40\,030$ km
Umfang eines Breitenkreises mit der Breite $j$	$= 2R\rho \cos j$
Länge eines Breitenkreisabschnittes zwischen $l_1$ und $l_2 = 2R\rho \cos j (l_1 - l_2) / 360^\circ$	
Oberfläche der gesamten Kugel	$= 4R^2\rho = 510,1 \cdot 10^6$ km <sup>2</sup>
Oberfläche der Zone zwischen den Breitenkreisen $j_1$ und $j_2$	$= 2R^2\rho (\sin j_1 - \sin j_2)$
Oberfläche des Zonenabschnitts $j_1$ bis $j_2$ und $l_1 - l_2 = D l$	$= 2R^2\rho (\sin j_1 - \sin j_2) D l / 360^\circ$
Volumen der gesamten Erdkugel	$= 4/3 R^3 \rho = 1\,083\,000$ Mio km <sup>3</sup>



2.6.4. ORTHODROME – LOXODROME

In der Geographie taucht die Frage nach der Berechnung der kürzesten Entfernung zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  auf der Erde auf. Filler bemerkt dazu im Kapitel Geschichte der Sphärischen Geometrie:

„Heute scheint sie (die sphärische Geometrie) allmählich wieder in Vergessenheit zu geraten. So war die Redaktion einer großen Tageszeitung bei der Entführung einer Lufthansa-Maschine im Jahre 1977 nicht in der Lage, die Entfernung zwischen Bonn und Mogadischu anhand der geographischen Koordinaten dieser beiden Orte zu berechnen oder zumindest eine kundige Person zu finden, die dazu in der Lage gewesen wäre.“ ( [9], Seite 44 )

Wie lang ist die Flugstrecke Bonn – Mogadischu nun und auf welchem Kurs fliegt das Flugzeug?

Definition: Als Kurs eines Verkehrsmittels bezeichnet man den Schnittwinkel der Bewegungsbahn mit dem Meridian.

Definition: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, als Teil eines Großkreises, nennt man Orthodrome („Geradlaufende“).

Die beiden Meridianbögen durch  $P_1$  und  $P_2$  bestimmen mit ihrem Schnittpunkt einen dritten Punkt  $P_n$ . Das sphärische Dreieck, das durch die Großkreisbögen  $P_1P_n$ ,  $P_2P_n$  und  $P_1P_2$  entsteht, hat als Seite  $c$  die gesuchte Entfernung  $P_1P_2$ , während die Seiten  $a = 90^\circ - j_2$  und  $b = 90^\circ - j_1$  gegeben sind.

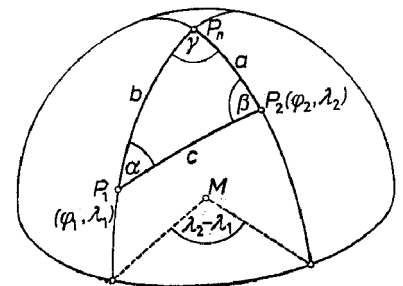


Abb. 28

Für die sphärische Entfernung  $P_1P_2$  gilt nach ( 24 )  $P_1P_2 = R \text{ arc } c$ .

Wendet man nun den Seiten-Kosinussatz auf das sphärische Dreieck  $P_1P_2P_n$  an, erhält man als Länge des Bogens  $P_1P_2$  auf der Kugel mit Radius  $R$ :

$$\cos c = \sin j_1 \sin j_2 + \cos j_1 \cos j_2 \cos (l_2 - l_1)$$

Dabei gilt:

Falls  $P_1$  und  $P_2$  auf demselben Meridian liegen, gilt  $l_2 - l_1 = 0$ , und somit

$$\cos c = \cos (j_2 - j_1) \Rightarrow c = (j_2 - j_1)$$

$$P_1P_2 = R \text{ arc } (j_2 - j_1)$$

Liegen  $P_1$  und  $P_2$  auf demselben Breitenkreis, also  $j_1 = j_2$ , gilt

$$\cos c = \sin^2 j + \cos^2 j \cos (l_1 - l_2)$$

Da  $\cos c = 1 - 2 \sin^2 \frac{c}{2}$  und  $\sin^2 j = 1 - \cos^2 j$ , erhält man

$$\sin \frac{c}{2} = \cos j \sin \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$$

**BEISPIEL 8:** Greifen wir das Beispiel Bonn – Mogadischu auf. Die Geographischen Koordinaten der beiden Orte lauten:

$$\text{Bonn : } \varphi_B = 50^\circ 43' 12'' = 50,72^\circ \text{ N} \quad \lambda_B = 7^\circ 04' 48'' \text{ O} = 7,08^\circ \text{ O}$$

$$\text{Mogadischu : } \varphi_M = 2^\circ 04' 00'' \sim 2,07^\circ \text{ N} \quad \lambda_M = 45^\circ 22' 00'' \text{ O} = 45,36^\circ \sim 45,37^\circ \text{ O}$$

$$\Delta \lambda = | \lambda_2 - \lambda_1 | = -38,29^\circ$$

Um die Länge  $d$  der Flugstrecke zu berechnen, benutzen wir den Seiten-Kosinussatz:

$$\begin{aligned} \cos d &= \sin \varphi_B \sin \varphi_M + \cos \varphi_B \cos \varphi_M \cos \Delta \lambda \\ &= \sin 50,72^\circ \sin 2,07^\circ + \cos 50,72^\circ \cos 2,07^\circ \cos -38,29^\circ \end{aligned}$$

$$\cos d = 0,524553982844^\circ$$

$$d \sim 58,36177755^\circ \text{ entspricht } \underline{6\,489,534 \text{ km}}$$

Den Kurs  $\alpha$  am Abflugspunkt erhalten wir mit dem Kotangenssatz:

$$\sin \varphi_B \cos \Delta \lambda = \cos \varphi_B \tan \varphi_M - \sin \Delta \lambda \cot \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos 50,72^\circ \cdot \tan 2,07^\circ - \sin 50,72^\circ \cdot \cos(-38,29^\circ)}{\sin(-38,29^\circ)}$$

$$\cot \alpha = 0,943553654205 = 1/\tan \alpha$$

$$\tan \alpha = 1,05982314365$$

$$\alpha_1 = 46,664^\circ \text{ oder } \alpha_2 = 226,664^\circ$$

In der Praxis erfolgt die Kursangabe entweder durch den sogenannten „wahren Kurs“, gemessen von Nord über Ost von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ , im Beispiel 8 durch  $\alpha = 226,664^\circ$  oder unter zusätzlicher Angabe der Himmelsrichtungen von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  (N-Norden, S-Süden, E-Osten, W-Westen), im Beispiel 8 durch  $\alpha = \text{S } 46,664^\circ \text{ E}$ .

In der Regel wird das Flugzeug aber nicht entlang der Orthodrome geflogen sein, da eine ständige Kurskorrektur notwendig wäre.

---

<sup>1</sup> Durch Umrechnung auf Bogenmaß und Multiplikation mit dem Erdradius  $R = 6371 \text{ km}$  erhält man die gewünschte Länge auf der Erdkugel.

Dies führt uns zur Frage nach Linien auf der Erdkugel, die einen konstanten Kurs aufweisen.

Definition: Als Loxodrome („schief laufende Linie“) bezeichnet man jede Kurve, die in ihrem Verlauf auf der Kugel alle Meridiane unter konstantem Winkel (= Azimut) schneidet. Die Meridiane, der Äquator und die Breitenkreise sind die „trivialen“ Beispiele. Loxodrome spielen daher bei allen Navigationsverfahren, also in der See- und Luftfahrt, als sogenannte Kurslinie eine wichtige Rolle. Der portugiesische Mathematiker **Pedro NUNEZ (NONIUS)** (1492-1577) wandte 1537 als erster diesen Kurven auf der Erdkugel sein Interesse zu. Ihr Name stammt von **SNELLIUS** (1580-1626).

Berechnen wir die Gleichung einer Loxodrome:

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  seien zwei infinitesimal benachbarte Punkte der Loxodrome mit den geographischen Koordinaten  $\varphi, \lambda$  sowie  $\varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda$ . Die Längen und Breitenkreise durch  $P_1$  und  $P_2$  bilden zusammen mit dem Loxodromteilstück  $P_1P_2$  ein Dreieck.

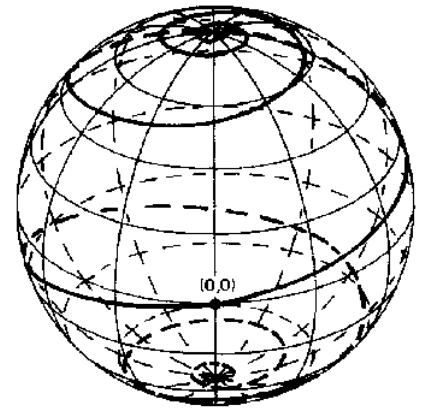


Abb. 29 Loxodrome für  $a = 80^\circ$

Da es sich nicht um Großkreise handelt, können wir die Aufgabe nicht mit elementaren Mitteln lösen. Man betrachtet daher, bei genügender Kleinheit des Dreiecks, dieses als eben und rechtwinklig.

Wie aus Abbildung 30 ersichtlich gilt dann

$$\tan \alpha = \frac{R \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda}{R \cdot d\varphi} \text{ und somit } \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan \alpha}{\cos \varphi} \quad (32)$$

Auflösen dieser Differentialgleichung führt auf

$$\frac{d\lambda}{\tan \alpha} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

$$\frac{\lambda}{\tan \alpha} = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + C^*$$

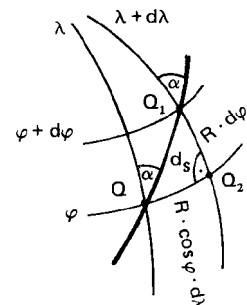


Abb. 30

Damit erhalten wir als Gleichung der Loxodrome mit Kurswinkel  $\alpha$ :

$$\lambda = \tan \alpha \cdot \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] + C \quad (33)$$

Durch die Integrationskonstante  $C$  ergibt sich eine Schar von Loxodromen. Soll die Loxodrome durch den Punkt  $P_1 (\varphi_1, \lambda_1)$  verlaufen, erhält man für die Konstante  $C$ :

$$\lambda_1 = \tan \alpha \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] + C$$

$$C = \lambda_1 - \tan \alpha \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]$$

Setzen wir  $C$  nun in die Gleichung (33) ein, erhalten wir die gesuchte Gleichung der von  $P_1 (\varphi_1, \lambda_1)$  unter dem Kurswinkel ausgehenden Loxodrome.

$$\lambda = \tan \alpha \cdot \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] + \lambda_1 - \tan \alpha \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]$$

Somit

$$\lambda - \lambda_1 = \tan \alpha \left[ \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]$$

$$\lambda - \lambda_1 = \tan \alpha \cdot \ln \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \quad (34)$$

Möchte man nun die bestimmte Loxodrome durch die Punkte  $P_1 (j_1, \lambda_1)$  und  $P_2 (j_2, \lambda_2)$  berechnen, so ergibt sich:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan \alpha \cdot \ln \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

Für  $\alpha$  erhält man:

$$\cot \alpha = \frac{\ln \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (35)$$

Die Bogenlänge der Loxodrome zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  ist, da das Dreieck wie ein ebenes behandelt werden kann,

$$\cos\alpha = \frac{R \cdot d\varphi}{ds} \quad ds = \frac{R \cdot d\varphi}{\cos\alpha}$$

somit folgt durch Integrieren

$$s = \frac{R}{\cos\alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{R}{\cos\alpha} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (36)$$

BEISPIEL 9: Berechnen wir die Flugstrecke und den Kurswinkel  $\alpha$  der Strecke Bonn – Mogadischu bei Flug entlang der Loxodrome, die die beiden Orte verbindet:

$$\cot\alpha = \frac{\ln \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2,07^\circ}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{50,72^\circ}{2}\right)}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-0,994245204939}{\text{arc} - 38,29^\circ} = -1,48775278256$$

$$\tan \alpha = 0,672154683039$$

$$\alpha_1 \gg 33,907^\circ \quad \text{oder} \quad \alpha_2 \gg 213,907^\circ.$$

Die Kursangabe lautet somit  $\alpha = 213,907^\circ$  oder  $\alpha = S 33,907^\circ E$ .

Die Flugstrecke ist

$$s = \frac{R}{\cos\alpha} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{6371}{\cos 213,907} \cdot (\text{arc}2,07^\circ - \text{arc}50,72^\circ) = \frac{6371}{\cos 213,907} \cdot (-0,849)$$

$$s = \underline{6517,301 \text{ km}}$$

Vergleicht man das Ergebnis mit den Werten in Beispiel 8, so weist der Kurs eine erwartungsgemäß große Differenz von  $12,757^\circ$  auf, während sich die Strecken um 27,767km, rund 0,43 % der Orthodromstrecke unterscheiden.

In der Praxis wird auf Loxodromstücken geflogen oder gefahren, da dann keine Kurskorrekturen nötig sind.

Der allgemeine Verlauf der Loxodrome:

Abbildung 30 zeigt den Verlauf einer Loxodrome mit  $\alpha = 80^\circ$ , die spiralenförmig zu den beiden Polen hinläuft. Gilt das für jeden Winkel  $\alpha$  ?

Betrachten wir beispielsweise eine Loxodrome von Punkt  $P_1(j_1 = 0, l_1 = 0)$ , dem Schnittpunkt des Nullmeridians mit dem Äquator, aus mit dem Kurswinkel  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Die Gleichung der Loxodrome vom Punkt  $P_1$  unter Winkel  $\alpha$  lautet nach ( 33 )

$$\lambda = \tan \alpha \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Betrachten wir die beiden Grenzwerte von  $\alpha$ : Für  $\alpha = 0^\circ$  (Nord-Süd-Kurs) ergibt sich der Meridian durch  $P_1$ , hier der Nullmeridian, für  $\alpha = 90^\circ$  (Ost-West-Kurs) der Breitenkreis durch  $P_1$ , in unserem Fall der Äquator.

Für  $j = 0^\circ$  wird  $l$  gleich 0. Wächst nun die geographische Breite  $j$ , wächst auch  $l$ . Das Wachstum von  $l$  ist monoton, da  $\tan(p/4 + j/2)$  im Intervall  $[1, +\infty)$  wächst und somit auch  $\ln \tan(p/4 + j/2)$  im Intervall  $[0, +\infty)$ .

Bewegt sich  $j$  gegen den Grenzwert  $90^\circ$ , so wächst  $l$  immer weiter, über  $360^\circ$ ,  $720^\circ$ , usw. Die von  $P_1$  ausgehende Loxodrome weist einen asymptotischen Verlauf Richtung Pol auf, ohne ihn jedoch zu erreichen. Für die südliche Halbkugel ist der Verlauf entsprechend.

Betrachten wir die Bogenlänge dieser Loxodrome von  $P_1$  zum Nordpol  $P_n$ , so gilt für einen Kurswinkel von  $\alpha = 60^\circ$ ,

$$s = \frac{R}{\cos \alpha} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{6371}{\cos 60^\circ} \cdot 90^\circ = 6371 \cdot \pi = 20015,778 \text{ km} \quad (37)$$

Dies entspricht dem halben Erdumfang. Es ergibt sich also trotz der asymptotischen Annäherung der Loxodrome an den Pol eine endliche Entfernung  $P_1 P_n$ .

Weiters zeigt sich, dass alle Punkte, für die die Loxodromenwege bis zum Nordpol sowie bis zum Äquator dieselbe Länge haben, in der mittleren Breite  $j_1 = p/4$  der nördlichen Halbkugel zu finden sind:

$$R \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_1}{\cos \alpha} = R \cdot \frac{\varphi_1}{\cos \alpha}, \text{ daher } \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \text{ für alle } \alpha.$$

### 3. KARTOGRAPHIE

„ICH HABE DIE HIMMEL GEMESSEN,  
NUN MEß' ICH DIE SCHATTEN DER ERDE“  
GRABSPRUCH KEPLERS ( [19], SEITE 245 )

#### 3.1. GESCHICHTE DER KARTOGRAPHIE

LAGRANGE (1770) über den Begriff Karte: „Eine geographische Karte ist nichts anderes als eine ebene Figur, die die Erdoberfläche oder einen Teil derselben darstellt.“

([2], Seite 13) Das Wort Karte verdankt seinen Ursprung offensichtlich dem Wort „cartes“ = Papier und wurde zur Bezeichnung der Karte zuerst in Portugal gebraucht.

Die älteste bekannte Karte stammt von **HEKTAIOS VON MILET** (geboren ~ 560 v.Chr.), der eine schematische Abbildung der damals bekannten Welt (Oikumene) entwarf. Die Erde als Kreisscheibe wird durch einen Durchmesser in zwei Halbkreise geteilt, wobei der nördliche Europa zeigt. Der südliche wird in der Mitte vom Nil zertrennt,

wobei das westliche Viertel Libva<sup>2</sup>, das östliche das östliche Asia darstellt. Bis zum ausgehenden Mittelalter bestimmte diese „OT-Form“ die Darstellung der Erdkarten (genannt „imago mundi“ –Karten) im europäischen Bereich. Die Vermittlung der allgemeinen Weltansicht jener Zeit unter Vernachlässigung von Details stand im Vordergrund.

Erste Schwierigkeiten der Abbildung der Erde traten mit der Erkenntnis ihrer Kugelgestalt auf. Der Geograph **STRABON** (64/63 v. Chr. –

20 n. Chr.) schuf mithilfe des von ERATHOSTENES eingeführten rechtwinkligen Koordinatensystems, gebildet aus Parallelkreisen und Meridianen, in seiner überwiegend länderkundlich- historisch orientierten „*Geographia*“ einen Entwurf einer Weltkarte.

Einer der bedeutendsten Männer in der Theorie der Projektionsabbildungen der Erde in der Antike war Klaudios **PTOLEMAIOS**. Sein geographisches Werk war für die Wissenschaft so richtungweisend wie sein „*Almagest*“ für die Astronomie. Es enthielt

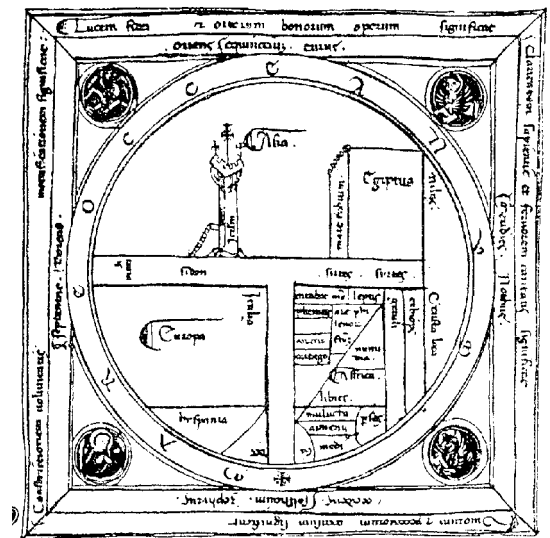


Abb. 31 Weltkarte aus einer Sallust-Handschrift des 14. Jahrhunderts

<sup>2</sup> Name für den damals bekannten Teil Afrikas

neben Anleitungen zu Kartenentwürfen ein Verzeichnis der Längen- und Breitengraden von 8100 Orten.

Im Gegensatz zu seinem Vorgänger **MARIOS VON TYROS** (Anfang 2. Jh. n. Chr.) fand **PTOLEMAIOS** die von **MARIOS** benutzte Zylinderprojektion mit dem Äquator als Berührungslinie aufgrund der starken Verzerrungen zu den Polen hin als ungeeignet. Er entwickelte zwei Arten von Kegelpjektionen. Dazu stülpte er der Nordhalbkugel einen Kegel über, der diese im Breitenkreis  $55^\circ$  N durch Rhodos, in der Mitte der damals bekannten bewohnten Zone, berührte. **PTOLEMAIOS** verbesserte den Entwurf durch Aufsetzen einer zweiten Kegelhaube auf die Südhalbkugel, im Kartenbild sichtbar durch eine Abknickung am Äquator. Da keine Kartenkonstruktion von **PTOLEMAIOS** selbst erhalten geblieben ist, ist es fraglich, ob er seine Entwürfe auch je ausgeführt hat. Zu seinen Lebzeiten noch kam es zu einer raschen Verbreitung dieser Entwürfe.

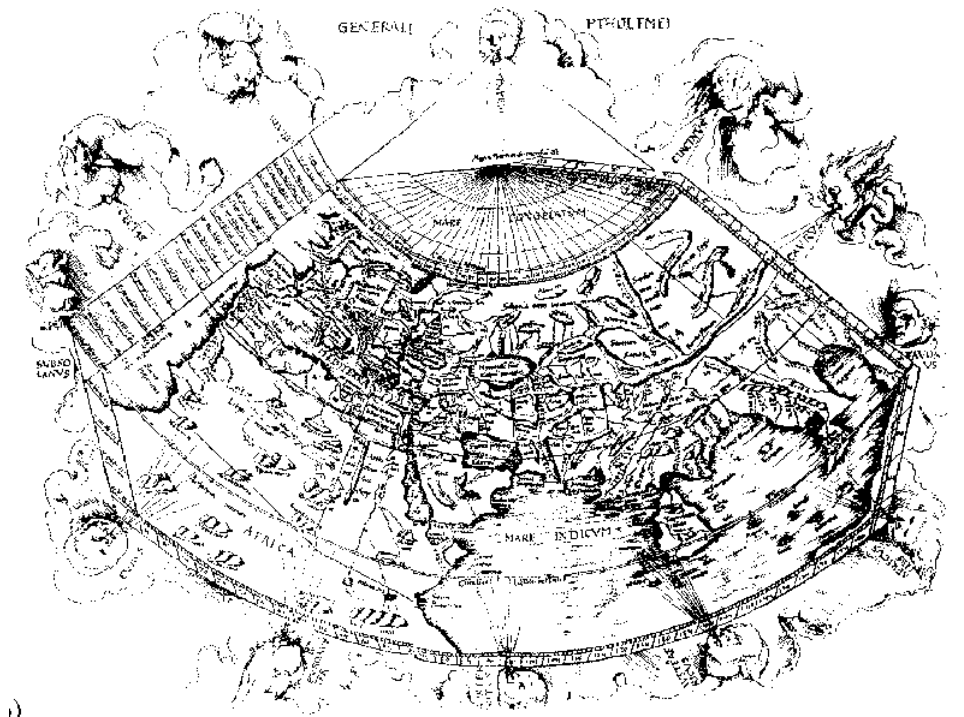


Abb. 32: Karte der bewohnten Welt in Kegelpjektion (Straßburg 1513), rekonstruiert aus den Längen- und Breitenangaben im Handbuch der Geographie des Ptolemaios

Die Karten des Mittelalters waren reich an phantastischen Details, aber arm an geographischen Fakten. In Europa waren symbolischen Weltkarten wie die sogenannten „Radkarten“, die als Mittelpunkt der kreisförmigen Weltscheibe Jerusalem aufwiesen, vorherrschend. In Seekarten stellte man die Kompasskurse beziehungsweise



Windrichtungen, die für das Erreichen eines Ortes notwendig waren, ebenfalls symbolisch dar. Von PTOLEMAIOS' Wissen, das im Schlaf der Vergessenheit ruhte, war man in dieser Zeit meilenweit entfernt. Es waren die Araber, die sein Erbe weiterführten. Aus dem 12. Jahrhundert sind wertvolle arabische Weltkarten vorhanden, mit bemerkenswerter Abbildung der damaligen Welt.

Von einer geometrisch fundierten Kartographie kann man erst um 1500 sprechen, jedoch noch ohne die explizite Berücksichtigung elementarer Grundbegriffe wie Flächen- oder Winkeltreue.

Nach einer Idee des kaiserlichen Hofastronomen **Johann STÖBERER** (lat. STABIUS, um 1450 – 1512) in Wien entwarf J. WERNER 1514 eine flächentreue Abbildung der Erdoberfläche. Die herzförmige Karte wurde 1530 durch **Peter APIAN** (1495-1552) veröffentlicht und erreichte weite Verbreitung. WERNER war es auch, der als erster die stereographische Projektion, die einzige in der Antike bekannte exakt definierte Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene, verwendete.

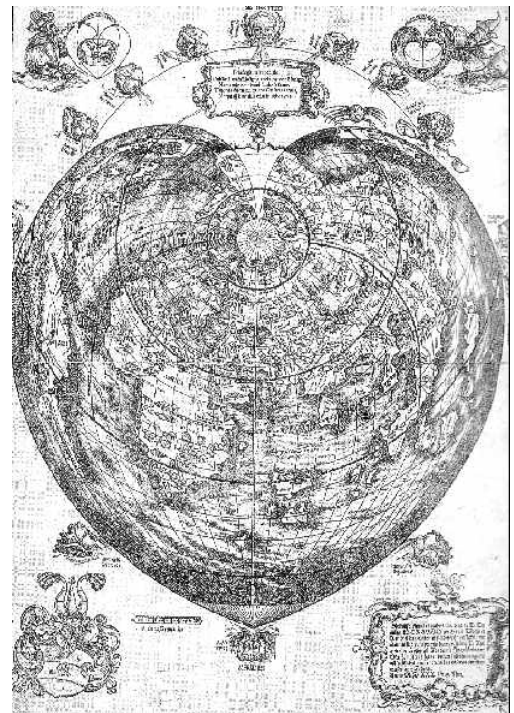


Abb. 33

Für die künstlerische Gestaltung des Kartenentwurfs von STÖBERER, der die halbe Erdkugel durch senkrechte Parallelprojektion auf eine

Tangentialebene abbildete, konnte Kaiser Maximilian Albrecht Dürer verpflichtet.

In dieser Zeit entstanden auch der mittelabstandstreue Azimutalentwurf von **CUSANUS** (1401-1464) und **SNELLIUS** und der flächentreue Entwurf von **SANSON** (1600-1667) und **FLAMSTEED** (1646-1719).

Der Höhepunkt der Renaissance-Kartographie war mit dem flämischen, später in Duisburg wirkenden Kartographen **Gerard KREMER**, genannt **MERCATOR** (1512-1594) erreicht. **MERCATOR** bildete schon 1541 auf einem von ihm entworfenen Globus einige Loxodrome ab. 1568 schließlich entstand die berühmte Mercatorprojektion, mit der Eigenschaft der Abbildung der Loxodrome als Geraden. Noch heute ist es ein Rätsel, wie **MERCATOR** diese Karte konstruieren konnte, denn die Mercatorprojektion kann keinesfalls durch eine elementare geometrische Projektion eingesehen werden.

Die Lösung des mathematischen Gesetzes, dass die Breitenkreisbilder vom Äquatorbild mit wachsender Breite ins Unendliche wachsen, konnte erst durch die viel später entstandene Infinitesimalgleichung erbracht werden. Man nimmt an, dass MERCATOR die punktweise konstruierten Loxodrome auf dem Globus näherungsweise auf die konstruierte Karte übertragen hat. Die Bedeutung dieses Kartenentwurfs für die Seefahrt war enorm und viele Mathematiker suchten nach dem mathematischen Gesetz zur Konstruktion dieser Karte.

Dem englischen Mathematiker **Thomas HARRIOT** (1560-1621) gelang um 1600 als ersten der Beweis der Winkeltreue der stereographischen Projektion.

Nach der Renaissancezeit, in der nur spezielle kartographische Abbildungen entwickelt und elementargeometrisch untersucht wurden, setzte sich **Heinrich LAMBERT** (1728-1777) 1772 in seinem Werk „Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land – und Himmelskarten“ erstmals allgemein mit dem Begriff einer kartographischen Abbildung der Kugeloberfläche oder von Teilen derselben in die Ebene auseinander. Bei der mathematischen Beschreibung kam er auf die wichtigsten Abbildungseigenschaften, wie Winkeltreue oder Flächentreue. Außerdem entwickelte er darin auch viele neue, heute noch großteils verwendete Kartennetzentwürfe.

Erst die Mathematiker EULER und LAGRANGE beantworteten die von LAMBERT offengelassenen Fragen. EULER bewies 1777, dass es keine maßstabgetreue Karte irgendeines Teils der Kugel in der Ebene geben kann. Die Begriffe Winkeltreue und Flächentreue wurden 1816 von GAUSS auf die Abbildung zweier beliebiger Flächen aufeinander verallgemeinert. Ebenfalls von ihm stammt der exakte Beweis, dass es keine flächen- und gleichzeitig winkeltreue Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene gibt.

### 3.2. PROBLEMSTELLUNG – ABBILDUNG DER KUGELOBERFLÄCHE IN EINE EBENE

Die Problematik, die Kugelgestalt der Erde in die Ebene abzubilden, ist mithilfe einiger einfacher Überlegungen leicht zu erkennen. Eine Möglichkeit, einen Globus in der Ebene abzubilden, wäre, ihn zu photographieren. Auf diese Weise würde jedoch weniger als die Hälfte der Erdkugel abgebildet werden. Versuchte man umgekehrt, einen Globus mit einer Karte zu „bekleben“, sieht man, dass es ein Ding der Unmöglichkeit ist. Rein intuitiv ergibt sich die Vorstellung, dass keine verzerrungsfreie Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene existiert.

Mathematisch lässt sich das wie folgt einsehen:

Satz 1.19., eine Folgerung des Theorema egregium besagt, dass bei längentreuen Abbildungen das GAUSSsche Krümmungsmaß  $K$  erhalten bleibt. Somit weisen zwei Flächen  $F$  und  $\bar{F}$ , die längentreu aufeinander abgebildet sind, das gleiche Krümmungsmaß  $K$  auf. Wie in Kapitel 1.20 gezeigt, verschwindet  $K$  in der Ebene, während die Kugel das konstante GAUSSsche Krümmungsmaß  $K = 1/R^2$  aufweist.

Damit ist folgender Satz gezeigt:

**SATZ 3.2.: Es existiert keine längentreue Kugelabbildung in die Ebene, und somit auch keine Kugelabbildung in die Ebene, die winkel- und flächentreu zugleich ist.**

### 3.3. KARTENNETZENTWÜRFE

Das Ziel der Kartennetzentwürfe ist, „die Netzlinien und Punkte eines Koordinatensystems von der exakt definierten Oberfläche eines Weltkörpers nach bestimmten Regeln so in die Ebene ab(zu)bilden, dass sie dort eine geeignete geometrische Grundlage für digitale Modelle und kartographische Darstellungen ergeben.“ ( [12], Seite 42 )

Um Missverständnisse zu vermeiden ist zu Anfang anzumerken, dass der Begriff „Kartenprojektion“ in der Kartographie nicht mit dem mathematischen Begriff der Projektion, im Sinne einer geometrischen Perspektive, übereinstimmt, sondern im allgemeinen viel weiter gefasst ist.

### 3.3.1. EINTEILUNGSARTEN

Kartennetzentwürfe werden eingeteilt

- nach Parametern des Kartennetzes

In einem Kartennetz können die Linien des geographischen oder eines geodätischen Koordinatensystems abgebildet sein, wobei geodätische Netze grundsätzlich für Karten im Maßstab 1 : 500 000 und größer verwendet werden, geographische Netze für Karten im Maßstab 1 : 500 000 und kleiner. Geodätische Netze bilden im Unterschied zu geographischen Netzen nicht die Netzlinien geographischer Koordinaten ab, sondern stellen Daten aus der Grundlagenmessung numerisch in einem einheitlichen metrischen System mit rechtwinkligen ebenen (geodätischen) Koordinaten dar, wobei die Netzlinien ein regelmäßiges quadratisches Gitter bilden. Geeignet dafür sind vor allem konforme transversale zylindrische Abbildungen (GAUSS'sche Koordinaten). Diese Arbeit beschränkt sich auf die Ausführung geographischer Netzentwürfe, die auch als kartographische Abbildung im engeren Sinne oder Gradnetzentwürfe verstanden werden.

- nach Art des Netzbildes

Als „echte Abbildungen“ bezeichnet man Netzentwürfe folgender Eigenschaften:

1. Alle Meridiane werden in Geraden abgebildet, die durch das Bild des Pols gehen (im Grenzfall im Unendlichen).
2. Alle Breitenkreisbilder bilden konzentrische Kreise um das Bild des Pols ( im Grenzfall mit unendlich großen Radien ).

Dies stimmt mit der Aussage überein, dass im Allgemeinen die Meridiane und Breitenkreise sowie deren Bilder Hauptverzerrungslinien darstellen, also maximale Längenverzerrung aufweisen.

Man unterscheidet drei Arten echter Entwürfe:

a) Konische Abbildungen oder echte Kegelabbildungen

Die Konischen Abbildungen ergeben folgendes Netzmuster: Die Meridiane werden in Geraden abgebildet, die durch einen Punkt gehen. Die Bilder der Breitenkreise bilden konzentrische Kreise um den Schnittpunkt der Meridianbilder. Die Winkel zwischen den Meridianen werden nicht winkeltreu, sondern stets verkleinert abgebildet. Geometrisch erhält man konische Abbildungen durch einen um die Erde gewickelten Kegelmantel, der in die Ebene abgewickelt wird. Sie sind insofern ausgezeichnet, da sie den „allgemeinsten Fall“ echter Abbildungen bilden, denn aus ihnen können sowohl die

zylindrischen durch den Sonderfall des Rückens der Kegelspitze ins Unendliche, als auch die azimutalen, beim Fall der Öffnung des Kegelwinkels zu  $180^\circ$  hervorgehen.

#### b) Zylindrische Abbildungen

Die Bilder der Meridiane und Breitenkreise erscheinen als zwei parallele, sich gegenseitig im rechten Winkel schneidende Geradenscharen. Geometrisch erhält man diese Abbildung bei Verwendung der Kartenebene als einen Zylindermantel, der die Erdkugel im Äquator berührt. Wickelt man diesen Zylindermantel auf, erhält man ein rechtwinkliges Netzbild.

#### c) Azimutale Abbildungen

Azimutale Abbildungen weisen dasselbe Netzmuster wie konische Abbildungen auf mit dem Unterschied, dass die Winkel, die die Meridiane auf der Erdkugel einschließen, den Winkeln zwischen den Bildgeraden entsprechen. Legt man die Kartenebene im Pol als Tangentialebene an die Erdkugel an, so ist die Berührungsebene in dem Fall gleich der Horizontebene, weshalb man diese Abbildungen auch Horizontalabbildungen nennt.

Neben den Netzentwürfen existieren auch solche, deren Netzmuster sich an nicht vollständig durch das Auflegen der Abbildungsebene erklären lassen. Sie umfassen

- die sog. Unechten Abbildungen, darunter Planisphären und Planigloben
- Kartennetze mit vorsätzlichen Verzerrungen (Kartenanamorphosen)
- Kartennetze als Ergebnis von Transformationen zwischen Karten

- nach Lage der Abbildungsfläche

Die Lage der Abbildungsfläche meint die gegenseitige Lage zwischen Erdkörper und Abbildungsfläche. Dabei gibt es drei verschiedene Fälle zu unterscheiden: die normalen (normalachsigen, erdachsigen, polständigen) Abbildungen, bei Zusammenfallen der Erdachse mit der Achse bzw. Lotlinie der Abbildungsfläche; die transversalen (querachsigen, äquatorständigen) Abbildungen, bei senkrechtem Aufeinanderstehen der Erdachse und Achse bzw. Lot, und die schiefachsigen (zwischenständigen) Abbildungen, bei denen die Erdachse und Achse bzw. Lot in einem beliebigen Winkel aufeinander stehen.

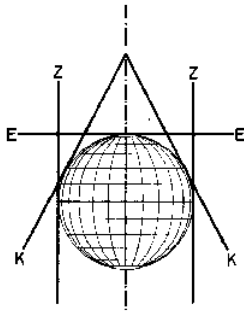
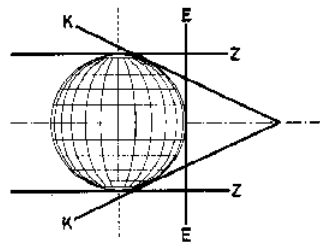
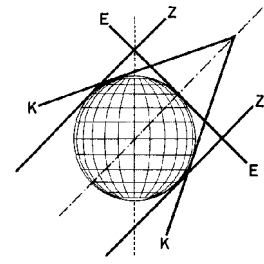


Abb. 34 normale



transversale



schiefachsige Abbildung

- nach den Abbildungseigenschaften

Da eine Abbildung einer Kugelfläche in die Ebene ohne Verzerrungen nicht existiert, unterscheidet man je nachdem, welche der Eigenschaften, Längen-, Winkel- oder Flächentreue, gilt, folgende Karten

- a) partieller Längentreue (Äquidistanz) in bestimmten Richtungen
- b) Flächentreue (Äquivalenz) oder
- c) Winkeltreue (Konformität)

Weiters gibt es noch die Möglichkeit der

- d) vermittelnden Abbildungen

Diese Abbildungen weisen keine Abbildungstreue für bestimmte geometrische Elemente auf, dafür verringern sich die Verzerrungen insgesamt.

### 3.3.2. VERZERRUNGSVERHÄLTNISSE

#### - Allgemeine Abbildungsgleichungen

Allgemeine Abbildungsgleichungen und die Bedingungen für bestimmte Eigenschaften, die sie erfüllen sollen wie Längentreue, Winkeltreue und Flächentreue, wurden im Kapitel 1.19. bereits erläutert. Für die Abbildung der Erdkugel in die Ebene werden je nach Eignung in der Abbildungsebene die rechtwinkligen Koordinaten  $\bar{x}, \bar{y}$  oder die polaren Koordinaten  $m, c$  als Funktionen der geographischen (sphärischen) Koordinaten  $j, l$  beliebiger Oberflächenpunkte verwendet.

$c$  entspricht dem Winkel zwischen den Meridianbildern,  $m$  dem Radius des Berührungskreises des Abbildungskegels mit der Sphäre (siehe Abbildung 35).

Anstelle von  $j$  benutzt man in vielen Fällen auch die Poldistanz  $d = 90^\circ - j$ .

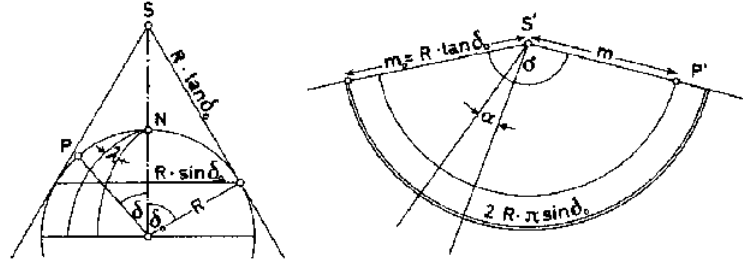


Abb. 35

Die Kugel mit der Parameterdarstellung  $x = R \cos l \cos j$ ,  $y = R \sin l \cos j$  und  $z = R \sin j$  wird durch folgende Abbildungsgleichungen in die Ebene überführt:

$$\bar{x} = \bar{x}(\lambda, \varphi), \quad \bar{y} = \bar{y}(\lambda, \varphi)$$

In Polarkoordinaten sind die Abbildungsgleichungen gegeben durch

$$m = f(l, j), \quad c = g(l, j) \quad (38)$$

Erddimensionserhaltende Gleichungen führen zum Abbildungsmaßstab 1 : 1. Beim Bezug auf eine Karte sind daher noch alle linearen Maße durch die Maßstabszahl  $m_k$  und alle Flächenmaße durch  $(m_k)^2$  zu dividieren.

### Längenverzerrung

Betrachtet man die schon im Kapitel 1.19. erwähnte Längenverzerrung im Punkt  $P(l, j)$ , definiert durch das Verhältnis der Bildlänge zur originalen Länge, erhält man als Quadrat der Längenverzerrung einer Abbildung der Kugel in die Ebene

$$L_\alpha^2 = \frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}d\lambda^2 + 2\bar{F}d\lambda d\varphi + \bar{G}d\varphi^2}{R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2} \quad (39)$$

Als Längenverzerrung der Parameterlinien ergibt sich aus (39) in Richtung der

$$\text{Breitenkreise } (j = \text{konst}, dj = 0) \quad L_b^2 = \frac{\bar{E}}{R^2 \cdot \cos^2 \varphi} := k^2$$

$$\text{und in Richtung der Meridiane } (l = \text{konst}, dl = 0) \quad L_m^2 = \frac{\bar{G}}{R^2} := h^2 \quad (40)$$

Die Längenverzerrung variiert dabei nicht nur von Punkt zu Punkt, sondern auch in jede Richtung  $ds$  in  $P$  gegenüber dem Meridian durch  $P$ . Die Richtung einer Kurve auf der Sphäre ist durch den sogenannten Azimut  $\alpha$  gegeben, das ist der Winkel, den die Kurve mit dem schneidenden Meridian einschließt.

Nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie gilt für  $a$  nach ( 32 )

$$\tan \alpha = \frac{\cos \varphi \cdot d\lambda}{d\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan \alpha}{\cos \varphi}$$

Die Abhängigkeit der Längenverzerrung von  $a$  wird deutlich durch Einsetzen von  $a$  in die Gleichung ( 39 )<sup>3</sup>.

Man erhält

$$L_{\alpha}^2 = L_m^2 \sin^2 \alpha + \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + L_v^2 \cos^2 \alpha \quad (41)$$

Möchte man nun die Richtung der maximalen Längenverzerrung berechnen, so muss

also  $\frac{dL_{\alpha}}{d\alpha} = 0$  gelten. Differenziert man zunächst ( 41 ), so ergibt sich

$$2 \cdot \frac{dL_{\alpha}}{d\alpha} \cdot L_{\alpha} = \sin 2\alpha \cdot (L_m^2 - L_v^2) + \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \cdot \cos 2\alpha$$

<sup>3</sup> Schreiben wir die Gleichung (39) ausführlicher in der Form

$$L_{\alpha}^2 = \frac{\bar{E}d\lambda^2}{R^2 \cos \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2} + \frac{2\bar{F}d\lambda d\varphi}{R^2 \cos \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2} + \frac{\bar{G}d\varphi^2}{R^2 \cos \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2}, \text{ so gelangen wir zu Formel ( 41 ),}$$

indem wir die Summanden einzeln berechnen:

$$\frac{\bar{E}d\lambda^2}{R^2 \cos \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2} = \frac{\bar{E}}{R^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\varphi^2}{d\lambda^2 \cos^2 \varphi}} = L_b \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = L_b \sin^2 \alpha$$

$$\frac{2\bar{F}d\lambda d\varphi}{R^2 \cos \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2} = \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \cdot \frac{d\lambda d\varphi}{\cos \varphi d\lambda^2 + \frac{d\varphi^2}{\cos \varphi}} = \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi d\lambda}{\cos^2 \varphi d\lambda^2 + d\varphi} = \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \cdot \frac{\frac{\cos \varphi d\lambda}{d\varphi}}{\frac{\cos^2 \varphi d\lambda^2}{d\varphi^2} + 1} =$$

$$\frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\bar{G}d\varphi^2}{R^2 \cos \varphi d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2} = \frac{\bar{G}}{R^2} \cdot \frac{1}{\frac{\cos^2 \varphi d\lambda^2}{d\varphi^2} + 1} = L_m \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = L_m \cdot \cos^2 \alpha$$



Aus der Bedingung  $\frac{dL_\alpha}{d\alpha} = 0$  folgt

$$\sin 2\alpha_e \cdot (L_m^2 - L_b^2) + \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi} \cdot \cos 2\alpha_e = 0, \text{ und man erhält schließlich}$$

$$\tan 2\alpha_e = \frac{2\bar{F}}{R^2 \cos \varphi (L_m^2 - L_b^2)}.$$

Da  $\tan$  die Periode  $\pi$  besitzt, werden durch die letzte Beziehung zwei Winkel,  $\alpha_e$  und  $\alpha_e + 90^\circ$  (gegen die Meridianrichtung), festgelegt. Sie sind die Richtungen extremer Längenverzerrung, auch Hauptverzerrungsrichtungen der Abbildung genannt und stehen senkrecht aufeinander.

Da die Parameterlinien senkrecht aufeinander stehen, beträgt der Kosinus des Winkels  $j$  somit 0. Daraus folgt wegen (9)  $0 = \cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ , dass  $F = 0$ . Da  $\alpha_e$  ebenfalls Null

ist, folgt auch  $\bar{F} = 0$ . Somit stehen auch die Bilder der Parameterlinien senkrecht aufeinander.

Betrachtet man unter diesen Voraussetzungen das Quadrat der Längenverzerrung für die beliebige Richtung  $\alpha$ , erhält man:

$$L_\alpha^2 = L_b^2 \cos^2 \alpha + L_m^2 \sin^2 \alpha \quad (42)$$

Das ist die Grundgleichung für die Längenverzerrung. Die Gleichung bestimmt auf der Ebene eine Ellipse, deren Hauptachsen durch die sogenannten Hauptverzerrungen  $a := L_b$  und  $b := L_m$  (maximale und minimale) gebildet werden. Läuft ein Punkt  $Q$  auf der Kugel einen Kreis um den Punkt  $P$  mit dem Radius  $ds$ , so durchläuft das Bild  $\bar{Q}$  in der Ebene aufgrund von  $d\bar{s} = L_\alpha ds$  eine Ellipse um  $\bar{P}$ , wobei die Achsen der Ellipse auf den Parameterlinien liegen und die Hauptachsen die Länge  $2ds a$  und  $2ds b$  haben. Diese Ellipse nennt man als Verzerrungsellipse oder Tissotsche Indikatrix (nach A. **TISSOT** (1824-1904)). Ist die Abbildung längentreu, so sind die Tissotschen Indikatrixen stets Einheitskreise.

### Winkelverzerrung

Mithilfe der Tissotschen Indikatrix kann man die Winkelverzerrung einer Abbildung berechnen. Der Kosinus des Winkels  $\alpha$  zwischen zwei Flächenkurven berechnet sich nach (8)

$$\cos \alpha = \frac{Edu_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + Gdv_1 dv_2}{\sqrt{Edu_1^2 + 2Fdu_1 dv_1 + Gdv_1^2} \sqrt{Edu_2^2 + 2Fdu_2 dv_2 + Gdv_2^2}}$$

Möchte man die Richtung  $a$  gegen die  $v$ -Linie ( $u = \text{konst}$ ) messen, setzt man  $u_1 = u$ ,  $v_1 = v$ ,  $u_2 = \text{konst}$  und  $F = 0$  und es gilt

$$\cos \alpha = \frac{Gdv dv}{\sqrt{Edu^2 + Gdv^2} \cdot \sqrt{Gdv^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Edu^2}{Gdv^2} + 1}}$$

Durch Umformung erhält man

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{du}{dv} \text{ und analog für die Bildfläche } \tan \bar{\alpha} = \sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{G}}} \cdot \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \tan \bar{\alpha} &= \sqrt{\frac{\bar{G}}{G} \cdot \frac{\bar{E}}{E}} \cdot \tan \alpha \\ \tan \bar{\alpha} &= \sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{\cos^2 v \cdot a^2}{\cos^2 v}} \tan \alpha = \frac{a}{b} \tan \alpha \end{aligned} \quad (43)$$

Die Winkeländerung des Winkels  $j$ , verursacht durch die Abbildung, wird durch die Differenz  $\varphi - \bar{\varphi}$  ausgedrückt. Man bezeichnet diese Differenz als Richtungsverzerrung.

Der Maximalwert  $w$  dieser Winkeldifferenz heißt Winkelverzerrung.

Nach den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen<sup>4</sup> gilt:

$$\frac{\sin(\bar{\varphi} - \varphi)}{\sin(\bar{\varphi} + \varphi)} = \frac{1 - \tan \varphi \cot \bar{\varphi}}{1 + \tan \varphi \cot \bar{\varphi}} \quad \text{Setzt man (43) ein, so ergibt sich}$$

$$\sin(\bar{\varphi} - \varphi) = \frac{a - b}{a + b} \sin(\bar{\varphi} + \varphi)$$

Die Winkeldifferenz  $w = \bar{\varphi} - \varphi$  erreicht ihren Extremwert, wenn  $\sin(\bar{\varphi} + \varphi) = 1$  wird.

Als maximale Winkeldifferenz erhält man folglich

$$\sin w = \pm \frac{a - b}{a + b}$$

Durch Berücksichtigung beider Vorzeichen ergibt sich als Winkelverzerrung im betrachteten Punkt der Wert  $2w$ .

$$W := 2w = 2 \arcsin \left| \frac{a - b}{a + b} \right| \quad (44)$$

<sup>4</sup>

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \cdot \frac{\cot \alpha}{\cot \alpha} = \frac{1 - \tan \beta \cot \alpha}{1 + \tan \beta \cot \alpha}$$

Bei Konformität der Abbildung ist die Längenverzerrung im Punkt P von der Richtung unabhängig, denn offensichtlich muss in ( 43 )  $a/b = 1$  gelten, damit der Winkel  $\alpha$  mit seinem Abbildungswinkel  $\bar{\alpha}$  übereinstimmt. Ist die Abbildung winkeltreu, so ergeben sich somit als Tissotsche Indikatrices wie bei der längentreue Abbildung Kreise, die jedoch nicht kongruent sind.

### Flächenverzerrung

Die Flächenverzerrung S wird, nach Kapitel 1.19, durch das Verhältnis einander entsprechender Oberflächenelemente der Bildfläche zur ursprünglichen Fläche definiert. Für die Abbildung der Kugel in die Ebene ist die Flächenverzerrung somit durch das Verhältnis der Flächeninhalte des Einheitskreises und dessen Bild, das ist die Verzerrungsellipse, gegeben:

$$S = \frac{\pi \cdot ds \cdot b \cdot ds \cdot a}{\pi \cdot ds^2} = b \cdot a$$

Es gilt also: Die Flächenverzerrung ist gleich dem Produkt der Hauptverzerrungen. Gilt für jeden Punkt einer Abbildung  $a \cdot b = 1$ , so ist diese Abbildung flächentreu.

Dies ist genau dann gewährleistet, wenn  $\overline{EG} - \overline{F}^2 = ab(EG - F^2)$ ,  $a \cdot b = 1$ .

## 3.3.3. KEGELENTWÜRFE – ECHTE ENTWÜRFE

### 3.3.3.1. Eigentliche Kegelentwürfe

- ALLGEMEINE ABBILDUNGSGLEICHUNG

Die allgemeinen Abbildungsgleichungen der eigentlichen Kegelentwürfe ergeben sich folgendermaßen ( vergleiche Abbildung 35, Seite 79 ): Der Kegel tangiert die Kugel in einem Breitenkreis, dem sogenannten Berührungsparellel. Wickelt man den Kegel in die Ebene ab, so schneiden sich die Bilder der Meridiane als Geraden im Punkt S' und bilden ein Strahlenbüschel. Die Bilder der Parallelkreise sind konzentrische Kreise um S'. Dem Längenunterschied l auf der Kugel, der Winkel der Meridiane am Pol, entspricht der Winkel c zwischen den Meridianbildern. Somit ergibt sich als Winkelverhältnis die Abbildungskonstante  $n := c/l$ , wobei  $0 < n < 1$  und die erste Abbildungsgleichung lautet  $c = nl$ .

Beim Abwickeln des Kegels ist weiters der Öffnungswinkel des verebneten Kegelmantels S,  $0 \leq d \leq 360^\circ$ , entstanden, der dem Winkel des Vollkreises  $2p = 360^\circ$  im Kugelpol entspricht.

Der Vollwinkel von  $2\rho$  erscheint somit in der Abbildungsfläche verkleinert als Winkel von  $n2\rho$  am Pol ( $n < 1$ ). Die Länge des Berührungsparallels nach der Abwicklung ist Halbmesser mal Bogen,  $u' = m_0 n 2\rho$ . Die Länge des Berührungsparallels auf der Kugel ist  $u = 2\rho \sin d_0 = 2\rho j_0$ . Da die Längen übereinstimmen müssen, gilt

$$m_0 n 2\rho = 2\rho \sin d_0, \quad n = \sin d_0 / m_0$$

$$\text{da } m_0 = \tan d_0 = \sin d_0 / \cos d_0, \text{ folgt}$$

$$n = \cos d_0 = \sin j_0$$

Die Werte der Sinus- sowie der Kosinusfunktion liegen im Intervall  $[ 0,1 ]$ , wodurch sich auch die Konstante  $nC$  in diesem Intervall bewegt.

Bei  $n = 1$  berührt der Kegel die Kugel nur im Pol. Die Kegelfläche geht in eine Ebene über und eine azimutale Abbildung entsteht.

Bei  $n = 0$  berührt der Kegel die Kugel im Äquator. Aus dem Kegel entsteht ein Zylinder, und somit eine zylindrische Abbildung.

Die Allgemeinen Abbildungsgleichungen für Kegelabbildungen in Polarkoordinaten lauten:

$m = f(d)$ $c = g(l)$	( 45 )
-----------------------	--------

wobei wie schon festgelegt

$$c = nl \text{ mit } n = \cos d_0 \text{ ist.}$$

Betrachten wir Abbildung 36, so ist  $P_0$  der Schnittpunkt eines Breitenkreises mit dem festgesetzten Nullmeridian;  $P$  ein beliebiger Punkt auf diesem Parallel.

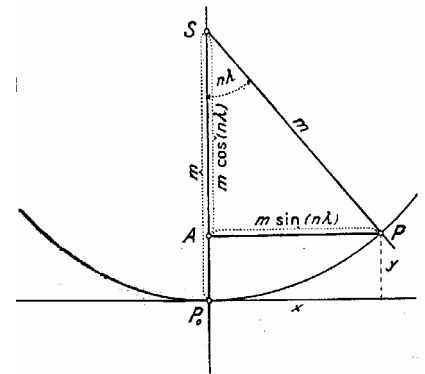


Abb. 36

Man erkennt:

$\bar{x} = m \sin(nl),$ $\bar{y} = m - m \cos(nl)$	( 46 )
----------------------------------------------------	--------

Dadurch sind die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P$  auf der Abbildungsfläche bezogen auf den Schnittpunkt des Breitenkreises mit dem Nullmeridian gegeben. Die  $\bar{x}$ -Koordinate wird nach der beschriebenen Methode von polaren auf kartesische Koordinaten umgerechnet ( $\bar{x} = m \cos c$ ). Bei der Umrechnung der  $\bar{y}$ - Koordinate ist zu beachten, dass die Kegelspitze nicht im Koordinatenursprung des Kartesischen Koordinatennetzes liegt.

Die Funktion  $m = f(d)$ , die bei den Abbildungsgleichungen in Polarkoordinaten auftritt, wird auch als „Halbmessergesetz“ der Abbildung bezeichnet. Sie kann so gewählt werden, dass die Abbildung bestimmte Eigenschaften erfüllt.

**VERZERRUNGSVERHÄLTNISSE** beim Kegelentwurf

Zur Berechnung der Längen- und Breitenverzerrung beim Kegelentwurf benötigt man die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Bildfläche :

Durch Einsetzen der Ableitungen von  $a(l, d) = (x(l, d), y(l, d), z(l, d))$

nach  $l$  :  $a_l = (m \cos l, -m \sin l, 0)$  und nach  $\delta$  :  $a_\delta = (dm/dd, dm/d, 0)$  in ( 4 ) erhält man:

$$\bar{E} = n^2 m^2, \bar{F} = 0, \bar{G} = \left(\frac{dm}{d\delta}\right)^2 \text{ und mit } E = R^2 \cos^2 \varphi \text{ (bzw. } \sin^2 \delta), F = 0, G = R^2$$

Es ergeben sich die Hauptverzerrungen:

$$a = k = \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} = \sqrt{\frac{n^2 m^2}{R^2 \sin^2 \delta}} = \frac{nm}{R \sin \delta}, \quad b = h = \sqrt{\frac{\bar{G}}{G}} = \sqrt{\frac{dm^2}{R^2 d\delta^2}} = \frac{dm}{R d\delta} \tag{47}$$

Beachtet man, dass  $m$  durch  $d$  bestimmt ist, so hängen die Hauptverzerrungen ebenfalls nur von  $d$  ab.  $a$  und  $b$  sind also mit  $d = \text{konst.}$  selbst konstant, dh. auf Breitenkreisen konstant.

- MITTABSTANDSSTREUER KEGELENTWURF  
KONISCHE ABBILDUNGEN

Abstandstreuer Kegelentwurf mit einem längentreuen Breitenkreis

Für die Eigenschaft der Abstandstreue eines Entwurfs, dh. Längentreue entlang der Meridiane, muss folgende Bedingung erfüllt sein: Alle Breitenkreise weisen vom Berührungspunkt und voneinander den gleichen Abstand wie den entsprechenden auf der Kugel auf. Somit ist der Halbmesser eines beliebigen Breitenkreises  $d$  gleich dem Halbmesser des Berührungspunktes  $d_0$  ( $m_0 = \tan d_0$ ) plus dem Bogenabstand  $d_0 - d = \varepsilon$  des Berührungspunktes  $d_0$  vom Breitenkreis  $d$ . Es gilt das Halbmessergesetz

$$m = m_0 - (d_0 - d) = \tan d_0 - \varepsilon$$

Ist die geographische Breite  $d > d_0$ , ist  $\varepsilon$  negativ und man zählt die Breitendifferenz hinzu, für  $d < d_0$  ist  $\varepsilon$  positiv, man zieht die Breitendifferenz ab. Die Abbildung ist durch Einsetzen in ( 45 ) in Polarkoordinaten, durch Einsetzen in ( 46 ) in kartesischen Koordinaten gegeben.

Durch die Forderung der Abstandstreue der Meridiane gilt  $\underline{h = 1}$ . Das Verhältnis Kartenbreitenkreis zu Kugelbreitenkreis führt auf den schon oben erhaltenen Wert: Aufgrund der Länge eines Kartenbreitenkreis von Halbmesser mal Bogen, also  $mn \cdot 2\rho$ , ist  $k = mn/\sin d$  bei  $R = 1$ .

Dies gilt für alle Kegelentwürfe;  $n$  und  $m$  variieren je nach Entwurfsbedingungen.

Die Flächenvergrößerung  $S$  ist aufgrund von  $h = b = 1$  durch  $a = k$  gegeben.

Als Winkelverzerrung erhalten wir durch Einsetzen von  $a$  und  $b$  in (44):

$$W = 2\omega = 2 \arcsin \left| \frac{\frac{nm}{\sin \delta} - 1}{\frac{nm}{\sin \delta} + 1} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{nm - \sin \delta}{nm + \sin \delta} \right|$$

Abbildung 37 zeigt einen abstandstreuen

Kegelentwurf mit dem Berührungsparallel

$$j_0 = 50^\circ, d_0 = 40^\circ.$$

Der Entwurf geht auf PTOLEMAIOS

zurück.

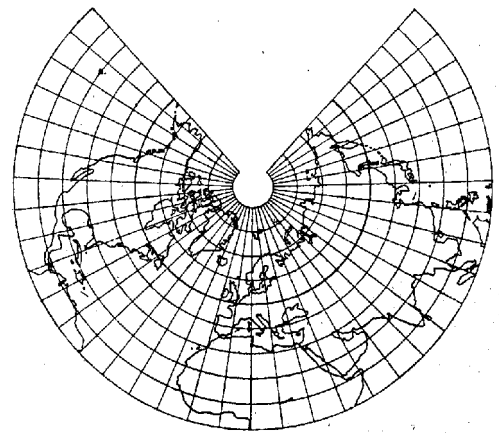


Abb. 37

### Abstandstreuer Kegelentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Da sich der in Bezug auf die Verzerrungen günstigste Teil der Abbildung in der Nähe des Berührungsparallel befindet, liegt die Idee nahe, den Entwurf durch das Schaffen einer abstandstreuen Abbildung, die zwei Breitenkreise  $\delta_1$  und  $\delta_2$  längentreu abbildet, zu verbessern. Seien die Breitenkreise  $\delta_1$  und  $\delta_2$  von einem mittleren Breitenkreis  $\delta_0$  mit dem Halbmesser  $m_0$  mit dem Abstand  $\varepsilon_0 = |\delta - \delta_{1,2}|$  gleich weit entfernt. Für die Halbmesser von  $\delta_1$  und  $\delta_2$  ergibt sich  $m_1 = m_0 - \varepsilon_0$  und  $m_2 = m_0 + \varepsilon_0$ . Setzt man nun wieder die Länge der beiden Breitenkreise  $\delta_1$  und  $\delta_2$ :

$$\bar{u}_1 = n2\pi(m_0 - \varepsilon_0) \text{ und } \bar{u}_2 = n2\pi(m_0 + \varepsilon_0)$$

mit den beiden Umfängen  $u_1 = 2\pi \sin(\delta_0 - \varepsilon_0)$  und  $u_2 = 2\pi \sin(\delta_0 + \varepsilon_0)$  der entsprechenden Breitenkreisen auf der Kugel ( $\delta_0 - \varepsilon_0$ ) und ( $\delta_0 + \varepsilon_0$ ) gleich, erhält man

$$2n\pi(m_0 - \varepsilon_0) = 2\pi(nm_0 - n\varepsilon_0) = 2\pi \sin(\delta_0 - \varepsilon_0)$$

$$2n\pi(m_0 + \varepsilon_0) = 2\pi(nm_0 + n\varepsilon_0) = 2\pi \sin(\delta_0 + \varepsilon_0).$$

Wendet man das Additionstheorem der Winkelfunktionen an, ergibt sich

$$nm_0 - n \varepsilon_0 = \sin \delta_0 \cos \varepsilon_0 - \cos \delta_0 \sin \varepsilon_0$$

$$nm_0 + n \varepsilon_0 = \sin \delta_0 \cos \varepsilon_0 + \cos \delta_0 \sin \varepsilon_0$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten, erhält man schließlich

$$2n \varepsilon_0 = 2 \cos \delta_0 \sin \varepsilon_0$$

$$n = \frac{\cos \delta_0 \sin \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$$

$n$  ist wieder abhängig von der Konstanten  $d_0$  des Berührungskegels.

Um die zweite Abbildungsgleichung zu erhalten, addiert man obige Gleichungen

$$2m_0 = 2 \sin \delta_0 \cos \varepsilon_0$$

$$m_0 = \frac{\sin \delta_0 \cos \varepsilon_0}{n}, \text{ wobei } n = \cos \delta_0 \sin \varepsilon_0$$

$$m_0 = \frac{\sin \delta_0 \cos \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0}{\cos \delta_0 \sin \varepsilon_0}, \quad m_0 = \varepsilon_0 \cdot \cot \varepsilon_0 \tan \delta_0$$

und erhält  $m_0 = \varepsilon_0 \cdot \cot \varepsilon_0 \tan \delta_0$  als Halbmesser des mittleren Breitenkreises  $\delta_0$ .

Der allgemeine Halbmesser eines beliebigen Breitenkreises ist

$$m = \varepsilon_0 \cot \varepsilon_0 \tan \delta_0 - \varepsilon$$

Durch  $c = n\lambda$  und  $n = \frac{\cos \delta_0 \sin \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$  erhalten wir wieder die Abbildung in

Polarkoordinaten und durch Einsetzen von  $m$  und  $c$  in ( 46 ) ist die Abbildung in kartesischen Koordinaten gegeben.

Betrachten wir das Verhältnis Kartenbreitenkreis – Kugelbreitenkreis  $k = nm/\sin \delta$ . Die Werte für  $k$  liegen in der „Zone“ zwischen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  unter 1, außerhalb dieser Zone über 1. Geometrisch bedeutet das, dass zwischen den beiden Schnittbreitenkreisen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  sich der Kegel innerhalb der Kugel befindet. Die Bilder der Meridiane sind in diesem Streckenabschnitt somit kürzer als die entsprechenden Meridiane auf der Kugel; außerhalb der Zone sind sie länger. Die kleine Achse der Indikatrix liegt in der inneren Zone in Richtung der Breitenkreise, außerhalb der Zone in Richtung der Meridiane.

Die Winkelverzerrung berechnet nach ( 44 ) durch Einsetzen von a und b

$$W = 2\omega = 2 \arcsin \left| \frac{1-b}{1+b} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{\sin\delta - mn}{\sin\delta + mn} \right| \quad \text{innerhalb der Zone und}$$

$$W = 2 \arcsin \left| \frac{a-1}{a+1} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{nm - \sin\delta}{nm + \sin\delta} \right| \quad \text{außerhalb der Zone.}$$

Aufgrund der Abstandstreue (  $h = 1$  ) drückt das Breitenkreisverhältnis  $k$  zugleich die Flächenverzerrung  $S$  aus. Analog zu den Breitenkreisverzerrungen werden in der inneren Zone zwischen den beiden Breitenkreisen die Flächen durch die Abbildung verkleinert, außerhalb dieser Zone vergrößert.

Abbildung 38 zeigt den eben berechneten Entwurf mit den längentreuen Breitenkreisen  $\varphi_1 = 65^\circ$  und  $\varphi_2 = 35^\circ$ .

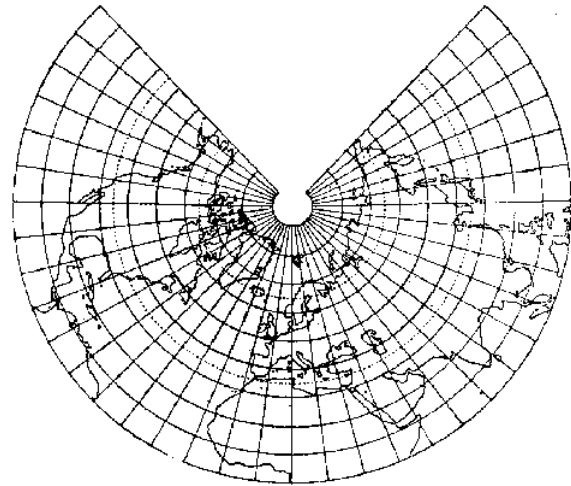


Abb. 38

Tabelle<sup>5</sup>: Verzerrungswerte des abstandstreuen Kegelentwurf mit einem längentreuen Breitenkreis (  $\varphi_0 = 50^\circ$ ;  $m_0, a_0 = S_0, b_0, W_0$  ) bzw. mit zwei längentreuen Breitenkreisen (  $\varphi_1 = 65^\circ, \varphi_2 = 35^\circ$ ;  $m_2, a_2 = S_2, b_2, W_2$  )

$\varphi$ in $^\circ$	$m_0$	$m_2$	$a_0 = S_0$	$a_2 = S_2$	$b_0$	$b_2$	$W_0$	$W_2$
0	1,7118	1,6925	1,3113	1,2818	1	1,0000	0,2702	0,2476
10	1,5372	1,5180	1,1958	1,1673	1	1,0000	0,1785	0,1546
20	1,3627	1,3434	1,1109	1,0827	1	1,0000	0,1051	0,0795
30	1,1882	1,1689	1,0509	1,0222	1	1,0000	0,0497	0,0220
40	1,0136	0,9944	1,0136	1,0000	1	0,9831	0,0135	0,0171
50	0,3891	0,8198	1,0000	1,0000	1	0,9659	0,0000	0,0347
60	0,6646	0,6453	1,0182	1,0000	1	0,9774	0,0180	0,0229
70	0,4900	0,4708	1,0975	1,0424	1	1,0000	0,0930	0,0415
80	0,3155	0,2962	1,3918	1,2920	1	1,0000	0,3291	0,2554
90	0,1410	0,1217	$\infty$	$\infty$	1	1,0000	3,1416	3,1416

Aus der Tabelle lassen sich leicht die verbesserten Meridianverzerrungswerte erkennen, sowie eine Verbesserung der Winkelverzerrung bei  $\varphi = 0-30^\circ$  sowie bei  $\varphi = 80-90^\circ$ , d.h. an den Randgebieten.

<sup>5</sup> – Werte aus WAGNER[32], Seite36/40 und HOSCHEK [14], Seite 60



• WINKELTREUE (KONFORME) KONISCHE ABBILDUNGEN

Um die Eigenschaft der Winkeltreue eines Entwurfs zu erhalten, muss, wie schon festgestellt, das Meridianverhältnis gleich dem Breitenkreisverhältnis sein. Da bei allen Kegelentwürfen das Breitenverhältnis  $k = nm / \sin \delta$  beträgt, muss das Halbmessergesetz  $m = f(\delta)$  so gestaltet sein, dass auch das Meridianverhältnis  $h = nm / \sin \delta$  wird. Das Meridianstück  $\Delta m$  gibt das Verhältnis in den Meridianen an und bedeutet „die Differenz der Halbmesser zweier nahe benachbarter Breitenkreise  $(m + \Delta m) - m$  - ins Verhältnis gesetzt zum entsprechenden Bogenstücken des Kugelmeridians  $\Delta \delta$ .“ ( [32], Seite 62 ); beziehungsweise infinitesimal  $dm/d\delta$ . Es muss also  $dm/d\delta = nm/\sin \delta$  gelten.

$$\frac{dm}{m} = n \frac{d\delta}{\sin \delta}$$

$$\int \frac{dm}{m} = n \int \frac{d\delta}{\sin \delta}$$

$$\ln m = n \ln \tan \frac{\delta}{2} + \ln c$$

$$m = c \tan^n \frac{\delta}{2}$$

Wird  $\delta = 90^\circ$ , erhält man den Halbmesser des Äquators,  $m = c$ . Für den im Breitenkreis  $\delta_0$  berührenden Kegel wird  $n = \cos \delta_0$  und der Halbmesser  $m_0 = \tan \delta_0$ . Wir können schreiben

$$m_0 = \tan \delta_0 = c \left( \tan \frac{\delta_0}{2} \right)^{\cos \delta_0}, \text{ wobei } c = \frac{\tan \delta_0}{\left( \tan \frac{\delta_0}{2} \right)^{\cos \delta_0}}$$

und erhalten als allgemeinen Halbmesser

$$m = \frac{\tan \delta_0}{\left( \tan \frac{\delta_0}{2} \right)^{\cos \delta_0}} \cdot \left( \tan \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0}$$

Betrachten wir das Breitenkreisverhältnis  $k = nm / \sin \delta$

$$k = \frac{\cos \delta_0 \cdot \frac{\tan \delta_0}{\tan^n \left( \frac{\delta_0}{2} \right)} \cdot \tan^n \left( \frac{\delta}{2} \right)}{\sin \delta}, \quad \text{also} \quad k = \frac{\sin \delta_0}{\tan^n \left( \frac{\delta_0}{2} \right)} \cdot \frac{\tan^n \left( \frac{\delta}{2} \right)}{\sin \delta}$$

Man sieht: für  $\delta = \delta_0$  wird  $k = 1$ , für alle anderen  $\delta$  wird  $k > 1$ . Für die Flächenverzerrung  $S$  ergibt sich  $S = k^2$ .

Schreibt man  $k$  unter Berücksichtigung von  $\tan \delta = \sin \delta / \cos \delta$  und  $\sin \delta = 2 \sin (\delta/2) \cos (\delta/2)$  an, so erhält man

$$k = \frac{\left( \cos \frac{\delta_0}{2} \right)^{n+1} \left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^{n-1}}{\left( \sin \frac{\delta_0}{2} \right)^{n-1} \left( \cos \frac{\delta}{2} \right)^{n+1}},$$

Da  $n < 1$ , gilt  $n-1 = -(1-n)$ , woraus sich für  $k$  ergibt

$$k = \frac{\left( \sin \frac{\delta_0}{2} \right)^{1-n} \left( \cos \frac{\delta_0}{2} \right)^{1+n}}{\left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^{1-n} \left( \cos \frac{\delta}{2} \right)^{1+n}}$$

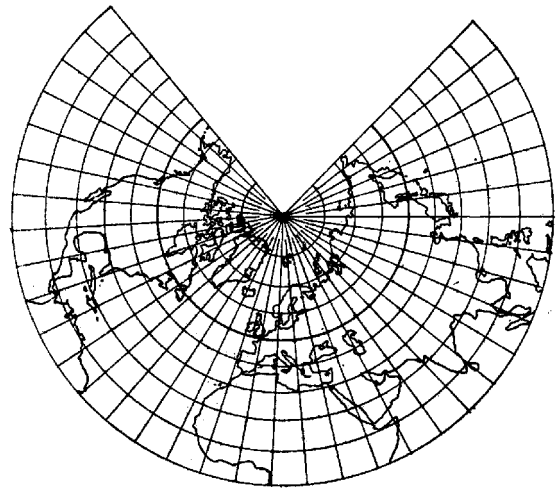


Abb. 39

$k$ , und damit auch  $h$ , weist für  $\delta = 0$  ( Pol ) den Wert  $\infty$  auf. Abbildung 39 zeigt eine winkeltreue Kegelabbildung für das Berührungsparallel  $j_0 = 50^\circ$  ( $d_0 = 40^\circ$ ). In der Literatur wird dieser Kartenentwurf auch Lambert-Gauss-Projektion genannt.

- FLÄCHENTREUE KONISCHE ABBILDUNGEN

Flächentreuer Kegelentwurf auf den Berührungskegel

Um den Wert von Flächen bei der Abbildung zu erhalten, muss das Halbmessergesetz  $m = f(\delta)$  gewährleisten, dass die zwischen zwei Breitenkreisen liegenden Zonen mit den entsprechenden Zonen auf der Kugeloberfläche flächengleich sind. Die Fläche einer Kugelzone ist  $O = 2\pi R h$  ( $R =$  Kugelradius, hier  $= 1$ ,  $h =$  Höhe der Zone), wobei die Höhe der Zone  $h = \cos \delta - \cos \delta_0$  ist. In der Ebene ergibt sich für die Kugelzone der Sektor jenes Kreisringes, der durch den Kreisbogen des Breitenkreises  $\delta_0$  mit dem Halbmesser  $m$  und dem Kreisbogen des beliebigen Breitenkreises mit dem Halbmesser  $m$  begrenzt wird. Die Fläche des Kreissektors ist  $O_S = n\pi m^2$ .

Den Flächeninhalt des Kreisringsektors erhält man durch die Differenz des Kreissektors mit Halbmesser  $m_0$  und des Kreissektors mit Halbmesser  $m$ :

$$O_S = n\pi m_0^2 - n\pi m^2$$

Setzt man die Flächen  $O_S$  und  $O$  gleich, erhält man

$$n\pi (m_0^2 - m^2) = 2\pi (\cos \delta - \cos \delta_0),$$

$$m^2 = m_0^2 - \frac{2(\cos \delta - \cos \delta_0)}{n}$$

Da  $m_0 = \tan \delta_0$  und  $n = \cos \delta_0$ , gilt

$$m^2 = \tan^2 \delta_0 - \frac{2(\cos \delta - \cos \delta_0)}{\cos \delta_0}$$

Formt man das Halbmessergesetz folgendermaßen um

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{\sin^2 \delta_0}{\cos^2 \delta_0} + 2 - \frac{2 \cos \delta}{\cos \delta_0} \\ &= \frac{\sin^2 \delta_0 + 2 \cos^2 \delta_0}{\cos^2 \delta_0} - \frac{2 \cos \delta}{\cos \delta_0} \\ &= \frac{1 + \cos^2 \delta_0}{\cos^2 \delta_0} - \frac{2 \cos \delta}{\cos \delta_0} \end{aligned}$$

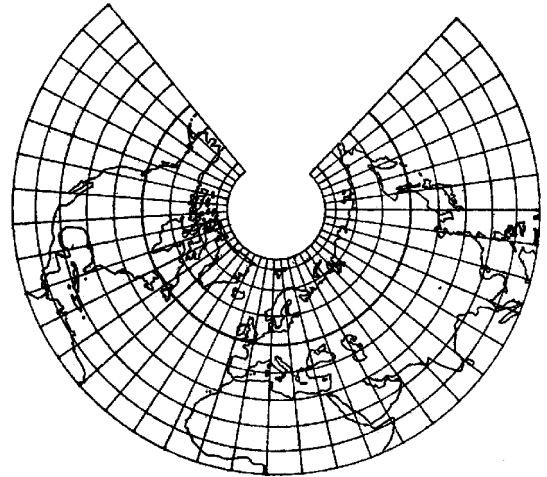


Abb. 40

erhält man

$$m = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \delta_0}{\cos^2 \delta_0} - \frac{2 \cos \delta}{\cos \delta_0}}$$

In Verbindung mit  $c = n\lambda$  und  $n = \cos \delta_0$  ist die Abbildung in Polarkoordinaten gegeben, und durch Einsetzen in (46) in kartesischen Koordinaten.

Für  $\delta = 0$  folgt als Halbmesser des Pols

$$m = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \delta_0}{\cos^2 \delta_0} - \frac{2 \cos \delta_0}{\cos \delta_0}} = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0}{\cos^2 \delta_0}} = \frac{1 + \cos \delta_0}{\cos \delta_0}$$

Das Bild des Pols ist somit ein Kreisbogen. Das Breitenkreisverhältnis für den Entwurf ergibt sich durch Einsetzen in die allgemeine Form  $k = nm/\sin \delta$ . Das Meridianverhältnis lässt sich durch eine einfache Überlegung rasch ermitteln: Bei flächentreuen Entwürfen, mit der Eigenschaft, dass sich Meridiane und Parallelkreise unter rechten Winkeln schneiden, gilt  $h k = ab = 1$ . Für das Meridianverhältnis  $h$  erhält man somit  $h = \sin \delta / nm$ .

Als Winkelverzerrung ergibt sich

$$W = 2 \arcsin \left| \frac{a-b}{a+b} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{\frac{nm}{\sin \delta} - \frac{\sin \delta}{nm}}{\frac{nm}{\sin \delta} + \frac{\sin \delta}{nm}} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{(nm)^2 - \sin^2 \delta}{(nm)^2 + \sin^2 \delta} \right|$$

## 3.3.3.2. Zylindrische Abbildungen

## • ALLGEMEINE ABSTANDSGLEICHUNG

Zylindrische Abbildungen kommen vor

- in normaler Lage mit geographischen Koordinaten für äquatoriale Bereiche, bei Seekarten auch in höheren Breiten
- in transversaler Lage mit geodätischen Koordinaten
- selten in schiefachsiger Lage

Die Zylinderabbildung ist, wie schon erwähnt, ein Grenzfall der konischen Abbildung. Setzt man  $n = 0$  und  $d_0 = \rho/2$ , so können die Abbildungsgleichungen direkt aus den Kegelentwürfen gewonnen werden. Da bei  $n = 0$  die Halbmesser aufgrund  $\tan \rho/2 = \infty$  werden, ist es nicht möglich, die eingeführten polaren Abbildungskordinaten anzuwenden. Der Zylinderfläche wird ein rechtwinkliges  $\bar{x}, \bar{y}$ - System aufgeprägt, wobei die  $\bar{x}$ -Achse auf dem Berührungslinie mit dem Äquator liegt, während die  $\bar{y}$ -Achse in der durch den Nullpunkt gehenden Mantellinie des Zylinders gebildet wird. Somit lauten die Abbildungsgleichungen

$$\begin{array}{l} \bar{x} = c l \\ \bar{y} = c \sin j \end{array} \quad (48)$$

Für die zylindrischen Entwürfe ist es sinnvoll, statt dem Polabstand  $d$  die geographische Breite  $j$  zu benutzen. Die Variation von  $c$  bedeutet nur eine Maßstabsänderung, da die Konstante  $c$  in den Gleichungen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  nur als Multiplikator vorkommt. Mit  $c = 1$  erhält man Zylinderentwürfe mit längentreuen Äquator. Mit diesen wollen wir uns jetzt näher auseinandersetzen.

## VERZERRUNGSVERHÄLTNISSE beim Zylinderentwurf

Die partiellen Ableitungen der Bildfläche lauten  $a_l = (1,0,0)$ ,  $a_j = (0, \cos j, 0)$ . Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform gilt somit  $\bar{E} = 1$ ,  $\bar{F} = 0$ ,  $\bar{G} = \cos^2 \varphi$ .

Wir erhalten die Hauptverzerrungen:

$$a = \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\cos \varphi}, b = \sqrt{\frac{\bar{G}}{G}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{1}} = \cos \varphi$$

- MITTABSTANDSTREUE ZYLINDRISCHE ABBILDUNG

Abstandstreuer Zylinderentwurf mit längentreuem Äquator

Durch die längentreue Abbildung des Äquators gilt für die Meridiane  $\bar{x} = \lambda$  (der Bogenabstand auf dem Äquator vom Nullmeridian). Für die Breitenkreise gilt aufgrund der Abstandstreue  $\bar{y} = j$ . Die Abbildungsfunktionen lauten:

$$\bar{x} = \lambda, \bar{y} = \varphi$$

Durch die Abbildung entsteht ein quadratisches Netz, „Quadratische Plattkarte“ genannt, in der Form eines  $p$  hohen und  $2p$  langen Rechtecks. Der Pol,  $\bar{x} = l, \bar{y} = p/2$  erscheint als äquatorlange Linie und bildet somit eine Unstetigkeitsstelle der Abbildung. Das Breitenkreisverhältnis entsteht anschaulich durch das Verhältnis der Länge der Bildbreitenkreise von  $2p$  zur Länge der entsprechenden Breitenkreise auf der Kugel von  $2p \cos j$ . Dadurch gilt  $k = 1/\cos j$ . Offensichtlich ist  $k$  bei  $j = p/2$  nicht definiert; ansonsten gilt  $k \leq 1$ .  $h = 1$  aufgrund der Abstandstreue, wodurch die große Achse  $a$  der Indikatrix in Richtung der Breitenkreise liegt. Aufgrund von  $h = 1$  ( $=b$ ), ist die Flächenvergrößerung  $S = h k = k$ . Die Winkelverzerrung hat den Wert

$$W = 2 \arcsin \left| \frac{a-b}{a+b} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{a-1}{a+1} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{\frac{1}{\cos \varphi} - 1}{\frac{1}{\cos \varphi} + 1} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right| = 2 \arcsin \tan^2 \frac{\varphi}{2}$$

Ein solcher Entwurf war schon im Altertum bekannt. Aufgrund seines rechtwinkligen Koordinatensystems ist er ideal für das Verzeichnen von mit geographischen Koordinaten gegebenen Punkten.

- WINKELTREUE (KONFORME) ZYLINDRISCHE ABBILDUNG (MERCATORPROJEKTION)

Man setzt wie bei den winkeltreuen Abbildungen zuvor aufgrund der Bedingung für Winkeltreue das Verzerrungsverhältnis im Breitenkreis mit dem Verzerrungsverhältnis im Meridian gleich. Das Breitenkreisverhältnis aller Zylinderentwürfe ist  $k = 1/\cos j$ . Das Meridianverhältnis entsteht aus der Differenz der Abstände zweier infinitesimal benachbarter Breitenkreise  $(y + dy) - y$  im Verhältnis zu dem entsprechenden Bogenstück  $dj$ .

Setzt man diese beiden Verhältnisse gleich

$$\frac{d\bar{y}}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \Rightarrow d\bar{y} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

ergibt sich die Differentialgleichung der Mercatorkarte.

Löst man die Differentialgleichung, erhält man

$$\bar{y} = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Für die  $\bar{x}$ -Werte ergibt sich analog zu den anderen Zylinderentwürfen

$$\bar{x} = l$$

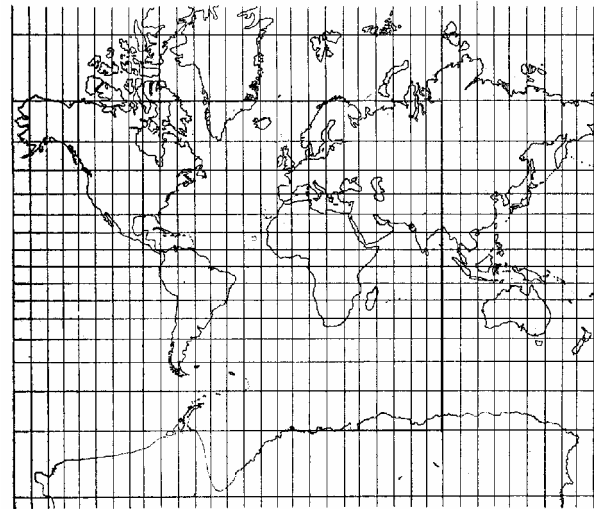


Abb. 41

Möchte man diesen Entwurf für zwei längentreue Breitenkreise ausführen, so entsteht aufgrund der Winkeltreue dasselbe Netz – alle diese Netze sind einander ähnlich.

Für  $h$  und  $k$  gilt aufgrund der Winkeltreue ( $W = 0$ )  $h = k = 1/\cos j$ . Die Verzerrung der Flächenwerte,  $S$  ist  $h k = 1/\cos^2 j$ . Dies führt zu einem raschen Anwachsen der Verzerrung. Betrachtet man zum Beispiel einen Entwurf mit dem Berührungsparallel  $60^\circ$ , so wird wegen  $\cos 60^\circ = 1/2$ ,  $S_{60^\circ} = 4$ . Dadurch ist dieser Netzentwurf für allgemeine Karten sehr ungeeignet. Seine weite Verbreitung verdankt das Netz aber der Tatsache, dass die Loxodrome als Geraden abgebildet werden.

- FLÄCHENTREUE ZYLINDRISCHE ABBILDUNG

Flächentreuer Zylinderentwurf mit längentreuem Äquator

(Archimedischer oder Lambertscher flächentreuer Zylinderentwurf)

Für die Bedingung der Flächentreue, setzen wir analog zur Vorgehensweise bei den eigentlichen Kegelentwürfen die Bildoberfläche und die Kugeloberfläche einer Zone gleich, wobei die Oberfläche einer Kugelzone bestimmt ist durch  $2\pi h$  ( $R = 1$ ) mit  $h = \cos d_1 - \cos d_2$ . Oder auf den Äquator bezogen mithilfe der geographischen Breite ausgedrückt  $h = \sin j_1 - \sin j_2$ . Im Falle, dass  $\bar{y} = j_2$  der Äquator ist, ergibt sich  $\sin j_2 = 0$ . Die Oberfläche der Kugelzone vom Äquator zum Breitenkreis  $j$  ist somit  $O = 2\pi \sin j$ .

Da der Äquator längentreu abgebildet werden soll, wird die Kugelzone in ein Rechteck der Länge  $\bar{x} = 2\rho$  übergeführt. Die Höhe  $\bar{y}$  des Rechtecks kann durch das Gleichsetzen der Flächeninhalte der Kugelzone und des Rechtecks ermittelt werden

$$2\rho\bar{y} = 2\rho \sin j, \text{ somit } \bar{y} = \sin j$$

Durch die erste Abbildungsgleichung der Zylinderentwürfe mit längentreuem Äquator,  $\bar{x}=1$ , erhalten wir die gesamte Abbildung. Das Vergrößerungsverhältnis im Breitenkreis ist wie beim abstandstreuen Zylinderentwurf  $k = 1/\cos j$ ; im Meridian beträgt das Vergrößerungsverhältnis  $h = \cos j$ . Man sieht: Die Flächenverzerrung als Kriterium der Flächentreue beträgt:  $a \cdot b = h \cdot k = 1$ . Da  $1/\cos j \leq 1$  und  $\cos j < 1$  gilt, liegt die große Achse  $a$  der Indikatrix in Richtung der Breitenkreise. Für die Winkelverzerrung erhalten wir

$$W = 2 \arcsin \left| \frac{a-b}{a+b} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{\frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi}{\frac{1}{\cos \varphi} + \cos \varphi} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \right|$$

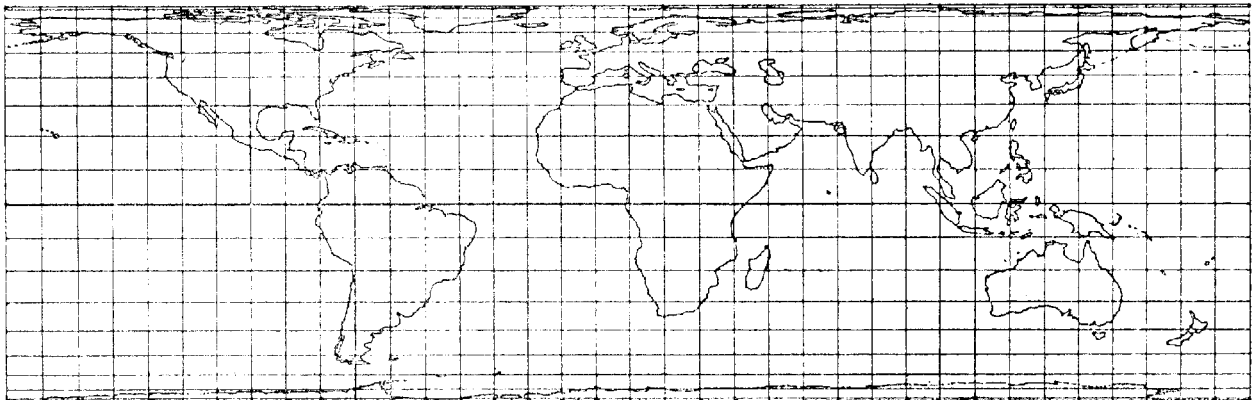


Abb. 42

Schon **ARCHIMEDES** (287-212 v. Chr.) kannte die Formel zur Berechnung des Kugelzonenflächeninhalts, aber erst der Mathematiker Johann Heinrich **LAMBERT** wandte diese Formel für den flächentreuen echten Zylinderentwurf an.

### 3.3.3.3. Azimutale Abbildungen

- ALLGEMEINE ABBILDUNGSGLEICHUNG

Diese Entwurfsgruppe stellt den Sonderfall von Kegelabbildungen mit  $n = 1$  dar. In diesem Fall schneiden sich die Meridiane am Pol unter ihren wahren Winkeln, wodurch kein Öffnungswinkel entsteht. Azimutale Abbildungen können die Abbildungsebene in allen Lagen haben, meist mit geographischen Koordinaten. Bei den azimutalen Abbildungen treten neben den mittabstandstreuen, flächentreuen und konformen auch auf einer echten Perspektive beruhende Projektionen auf.

Die Abbildungsgleichungen erhält man direkt aus jenen der Kegelentwürfe, indem man  $n = 1$  bzw.  $d_0 = 0$  setzt. Für den abstandstreuen Entwurf mit einem Berührparallel mit dem Halbmessergesetz  $m = \tan d_0 - (d_0 - d)$  erhält man unmittelbar für  $d_0 = 0$   $m = d$ . Man kann die Abbildungsgleichungen aber auch so wie bisher, mit geometrischen Überlegungen herleiten.

Der Namen „azimutale Entwürfe“ ergibt sich aus der Tatsache, dass sich der Azimut sämtlicher Punkte des Entwurfs in Bezug auf eine feste Richtung und auf den Berührungspunkt der Projektionsebene nicht verändert.

Der Pol, der Berührungspunkt zwischen Kugel und Ebene, bildet auch den Kartenmittelpunkt. Dies führt zu der Eigenschaft azimutaler Entwürfe, dass sämtliche Punkte auf der Kugel, die vom Pol dieselbe Entfernung haben, ebenso in der Ebene abgebildet sind.

Das azimutale Koordinatensystem ist hier mit dem geographischen identisch. Der Nullmeridian des Globus soll sich auf die positive  $\bar{y}$  - Achse abbilden.

$$\begin{array}{l} \bar{x} = m \sin l \\ \bar{y} = m \cos l \end{array} \quad (49)$$

#### VERZERRUNGSVERHÄLTNISSE beim Azimutalentwurf

Die Verzerrungsverhältnisse lassen sich leicht aus den allgemeinen Hauptverzerrungen beim Kegelentwurf ableiten. Setzt man  $n = 1$ , erhält man

$$a = \frac{m}{R \sin \delta}, b = \frac{dm}{R d\delta}$$



• MITTABSTANDSSTREUE AZIMUTALE ABBILDUNG

Für eine abstandstreue Abbildung muss der Abstand der Breitenkreise vom Pol (Berührungspunkt) in der Karte dem entsprechenden Abstand der Breitenkreise vom Pol auf der Kugel entsprechen. Somit ergibt sich als Halbmessergesetz  $m = d$  und mit der Gleichung  $c = l$  erhalten wir die gesamte Abbildung in Polarkoordinaten.

Für die Darstellung in kartesischen Koordinaten setzt man in ( 46 ) ein.

$$\bar{x} = d \sin l, \quad \bar{y} = d \cos l$$

Das Breitenkreisverhältnis ist analog zu den anderen Kegelentwürfen  $k = \frac{m}{\sin \delta} = \frac{d}{\sin \delta}$ .

Aufgrund der Abstandstreue gilt für das Meridianverhältnis  $h = 1$ . Die Flächenverzerrung entspricht damit dem Breitenkreisverhältnis,  $S = k$ . Als Winkelverzerrung erhalten wir

$$W = 2 \arcsin \left| \frac{a-b}{a+b} \right| = 2 \arcsin \left| \frac{\frac{\delta}{\sin \delta} - 1}{\frac{\delta}{\sin \delta} + 1} \right|$$

Wegen  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sin \delta} = 1$  ist die Abbildung im Pol

längentreu und in der Polregion nur wenig abweichend davon.

Der Entwurf wurde schon von MERCATOR angewendet, ist aber wahrscheinlich älter.

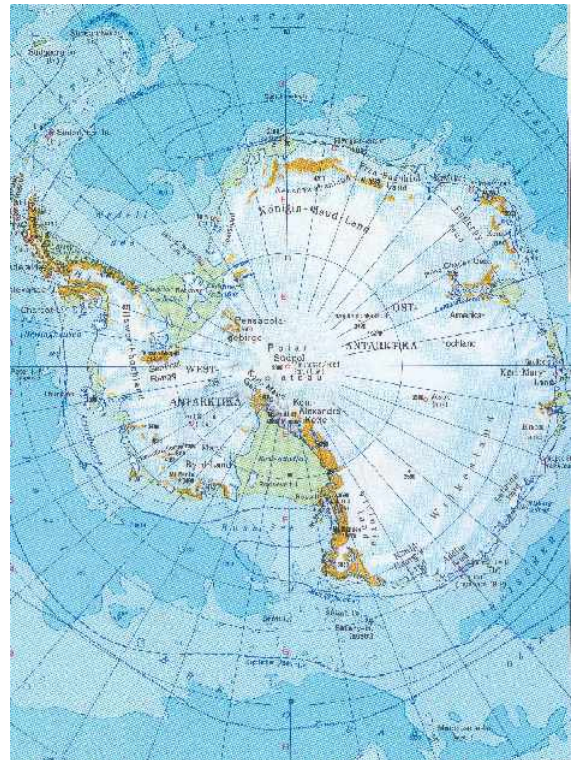


Abb. 43 Antarktis

• WINKELTREUE (KONFORME) AZIMUTALE ABBILDUNG –  
STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION

Aufgrund der Winkeltreue muss wiederum das Breitenkreisverhältnis dem Meridianverhältnis gleichgesetzt werden. Das Breitenkreisverhältnis ist bei azimutalen Entwürfen  $k = m/\sin \delta$ . Für das Meridianverhältnis setzt man den infinitesimalen Halbmesserszuwachs ins Verhältnis zum entsprechenden infinitesimalen Bogenstück des Kugelmeridians,  $h = dm/dd$ .

Daraus folgt wegen  $h = k$  :  $\frac{m}{\sin \delta} = \frac{dm}{d\delta}$ ,  $\frac{dm}{m} = \frac{d\delta}{\sin \delta}$

Statt der Lösung der Differentialgleichung kann man sich durch Zurückgreifen auf den winkeltreuen Kegelentwurf schon gewonnener Informationen bedienen. Indem man dort  $n = 1$  und  $c = 2^6$  setzt, erhält man als Halbmessergesetz dieser Abbildung mit längentreuem Äquator  $m = 2 \tan \frac{\delta}{2}$ .

In Verbindung mit  $c = 1$  ist die Abbildung in Polarkoordinaten gegeben, in Kartesischen Koordinaten durch Einsetzen in ( 49 ).

Man sieht:

- Die Punkte des Äquators (  $d = 0$  ) sind Fixpunkte der Abbildung, dh.  $m(0) = 0$ ,  $c(1) = 1$ .
- Für  $d$  im Intervall ( 0,  $\pi/2$  ) befinden sich alle abgebildeten Punkte innerhalb des Äquatorkreises, für  $d$  außerhalb dieses Intervalls außerhalb des Äquatorkreises.
- Für  $d = -\pi/2$  ist die Abbildung unbestimmt. Zähler und Nenner verschwinden.

Der Projektionspunkt S hat keinen Bildpunkt.

Dieser Netzentwurf stellt im Gegensatz zu den bisherigen eine Projektion im mathematischen Sinn dar. Das Halbmessergesetz kann somit auch rein geometrisch gefunden werden:

Aus der Abbildung 44 kann man leicht erkennen, dass  $NP' = NS \tan d/2$ . Da beim Einheitskreis die Strecke NS den Wert 2 aufweist, ergibt sich als Halbmesser  $NP' = 2 \tan d/2$  ergibt.

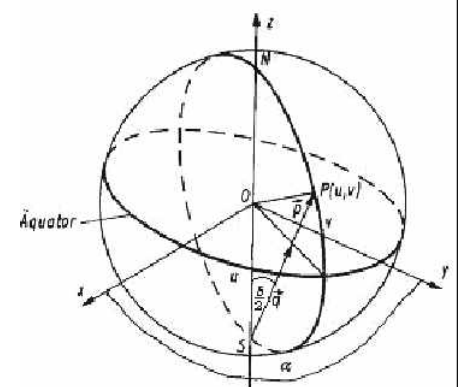


Abb. 44

<sup>6</sup> Im Kartenmittelpunkt (Bildpunkt des Pols) sollen keine Verzerrungen auftreten:

$$k = \frac{m}{\sin \delta} = 1 \Rightarrow \frac{c \tan \frac{\delta}{2}}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = \frac{c}{2 \cos \frac{\delta}{2}} = 1. \quad \text{Für } d = 0 \text{ folgt } c = 2.$$

Durch Projektion der Punkte der Kugelfläche vom Südpol aus durch Strahlen auf die Ebene, die im Nordpol die Kugel tangiert, wird die Kugel auf die Ebene abgebildet.

Dieser Entwurf zeichnet sich vor allem durch zwei Eigenschaften aus: Die Winkeltreue und die Kreistreue (Beweise der Eigenschaften findet man bei Schröder, [26], Seite 26ff).

Kreistreue bei einer Abbildung bedeutet, dass sie Kreise auf der Sphäre wieder als Kreise abbildet, mit Ausnahme der Kreise, die durchs Projektionszentrum gehen, diese werden als Geraden wiedergegeben.

Die Wahl des Projektionszentrum ist für diese beiden Eigenschaften natürlich nicht entscheidend. Wählt man einen Pol als Projektionszentrum, so nennt man die Projektion eine polständige Projektion oder Azimutalprojektion. Liegt hingegen das Projektionszentrum in einem Punkt des Äquators, so erzeugt man eine querachsige oder äquatorständige Projektion. Bei beliebiger Wahl des Projektionszentrums, spricht man bei entsprechender Festlegung der Bildebene von einer schiefachsigen stereographischen Projektion.

Das Breitenkreisverhältnis ist

$$k = \frac{m}{\sin \delta} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}} . \quad \text{Entsprechend lautet aufgrund der Winkeltreue das}$$

Meridianverhältnis  $h = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}$ , wobei  $h = k > 1$ . Für die Flächenänderung ergibt sich

$$S = \frac{1}{\cos^4 \frac{\delta}{2}} . \quad \text{Wegen } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ wird } k_{90^\circ} = \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2 \text{ und damit } S_{90} = 4 . \quad \text{In } 90^\circ$$

Polabstand werden die Flächen also bereits vervierfacht.

Die Projektionsidee stammt von **HIPPARCH** (160 - 125 v.Chr.) Die Eigenschaft der Winkeltreue wurde erst später entdeckt.

- FLÄCHENTREUE AZIMUTALE ABBILDUNG

Analog zu den vorherigen flächentreuen Abbildungen setzt man Teile der Kartenebene mit entsprechenden Teilen der Erdoberfläche gleich. Wir betrachten die Oberfläche einer „Kugelhaube“ bis zum Breitenkreis  $d$ ,  $O = 4 \rho \sin^2 d/2$ . Auf der Ebene entspricht dieser Teil einer Kreisfläche mit dem Radius  $m$  und dem Flächeninhalt  $\rho m^2$ .

Durch Gleichsetzen folgt für das Halbmessergesetz

$$\pi m^2 = 4\pi \sin^2 \frac{\delta}{2} \Rightarrow m = 2 \sin \frac{\delta}{2}$$

Das Breitenkreisverhältnis beträgt

$$k = \frac{m}{\sin \delta} = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\sin \delta} = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}, \quad k = \frac{1}{\cos \frac{\delta}{2}}$$

Aufgrund der Flächentreue können wir somit aus  $k$  das Meridianverhältnis ermitteln:  $h = \cos d/2$ . Betrachtet man die beiden Verhältnisse näher, so sieht man:  $k \leq 1$  und  $h < 1$ .  $a$ , die große Achse der Indikatrix liegt stets in Richtung der Breitenkreise. Am Pol ( $d = 0$ ) werden die Verhältnisse 1, somit ist die Abbildung dort verzerrungsfrei.

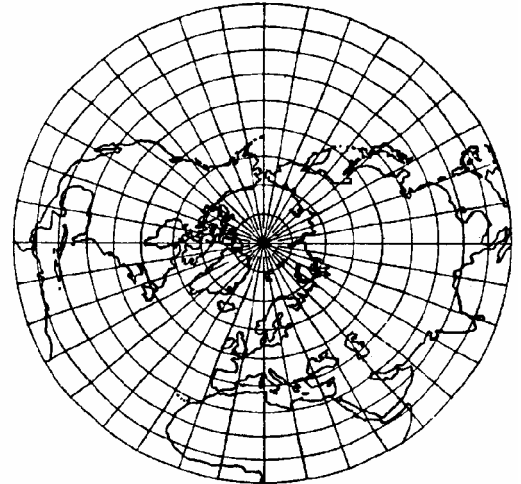


Abb. 45

#### PROJEKTIONEN- PERSPEKTIVEN

Unter projektiven Entwürfen versteht man solche Entwürfe, die durch direkte Projektion der Kugelpunkte von einem Augenpunkt aus auf eine Ebene gewonnen werden. Bei der zuerst beschriebenen winkeltreuen Azimutalprojektion, der stereographischen Projektion, lag dieser Augenpunkt im Gegenpol des Berührungspunktes der Projektionsebene.

Wie jedoch ist das Halbmessergesetz zu finden, wenn dieser Augenpunkt  $O$  allgemeine Lage hat ?

Neben der Abhängigkeit vom Polabstand  $d$  des Kugelpunktes  $P$  wie bisher, ist  $m(d)$  zusätzlich abhängig von der Lage von  $O$ . Zur näheren Untersuchung definieren wir die Entfernung von  $O$  zum Erdmittelpunkt  $M$  als „Augenabstand“  $D$ .

Nach Abbildung 46 ist offensichtlich  $AP = \sin d$ ,  $AM = \cos d$ ,  $NM = 1$ .

Die Dreiecke  $ONP'$  und  $OAP$  sind ähnlich, daher gilt

$$\frac{NP'}{AP} = \frac{ON}{OA} \Rightarrow m = NP' = \frac{AP \cdot ON}{OA}$$

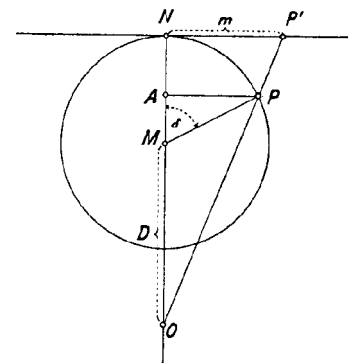


Abb.46

Da  $ON = D+1$ ,  $OA = D + \cos d$ , gilt

$$m = \frac{(D+1)\sin\delta}{D + \cos\delta} \quad (50)$$

Wir haben das Halbmessergesetz mit den Variablen  $D$  und  $d$  erhalten. Betrachten wir die stereographische Abbildung, so gilt  $D = 1$ . Eingesetzt in die Formel ergibt sich das uns schon bekannte Halbmessergesetz

$$m = \frac{2 \sin \delta}{1 + \cos \delta} = \frac{4 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\delta}{2}} = 2 \tan \frac{\delta}{2}$$

- GNOMISCHE PROJEKTION - ZENTRALPROJEKTION

Die Gnomische Abbildung oder Zentralprojektion, durch die eine azimutale Abbildung entsteht, erhält man für den Fall, dass  $D = 0$  wird, der Augenpunkt sich also im Erdmittelpunkt befindet. Eingesetzt in ( 50 ) erhalten wir für das Halbmessergesetz  $m = \tan d$ .

Das Breitenkreisverhältnis ist, wie bei allen azimutalen Entwürfen  $k = \frac{m}{\sin \delta} = \frac{1}{\cos \delta}$ .

Da im Äquator  $\cos 90^\circ = 0$ , ist die Abbildung auf eine Fläche kleiner als die Halbkugel beschränkt. Das Längenverhältnis im Meridian wird sogar  $1/\cos^2 d$ , sodaß die Flächenänderung  $S = 1/\cos^3 d$  beträgt. Die Winkeländerung folgt aus

$$\sin \omega = \pm \frac{a-b}{a+b} = \pm \frac{\frac{1}{\cos^2 \delta} - \frac{1}{\cos \delta}}{\frac{1}{\cos^2 \delta} + \frac{1}{\cos \delta}} = \pm \frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta} = \pm \frac{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\delta}{2}} = \pm \tan \frac{\delta}{2}$$

Folgender Vorteil macht das Netz trotz der enormen Verzerrungsverhältnisse bedeutend für die Praxis: Eine Großkreisebene verläuft stets durch den Kugelmittelpunkt. Dadurch liegen die „Sehstrahlen“ vom Kugelmittelpunkt zu den Großkreispunkten in einer Ebene in dieser Großkreisebene. Schneiden sich zwei Großkreisebenen, entsteht eine gerade Linie, somit auch beim Schnitt der Großkreisebene mit der Projektionsebene. Damit ist anschaulich klar, dass alle Großkreise als Geraden abgebildet werden. Diese Eigenschaft macht das Netz besonders geeignet für die Bestimmung des Verlaufs der Orthodrome zwischen zwei Punkten.

- ORTHOGRAPHISCHE PROJEKTION

Betrachten wir einen perspektivischen Entwurf mit dem Augenpunkt im Unendlichen. Wegen  $D = \infty$ , muss man in ( 50 ) den Grenzübergang  $D \rightarrow \infty$  durchführen:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{(D+1) \sin \delta}{D + \cos \delta} = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{D}\right) \sin \delta}{1 + \frac{1}{D} \cos \delta} = \frac{\sin \delta}{1} = \sin \delta$$

Man erhält dann als Halbmessergesetz

$m = \sin d$ $\alpha = \lambda$
---------------------------------

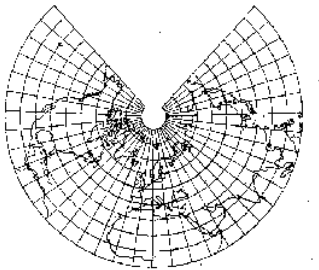
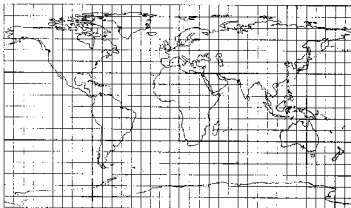
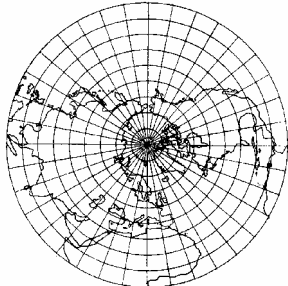
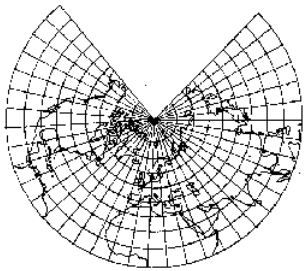
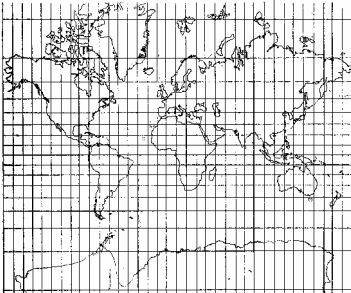
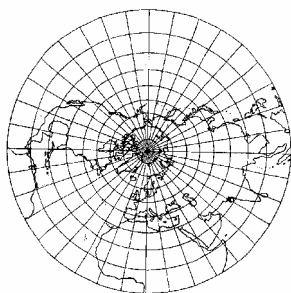
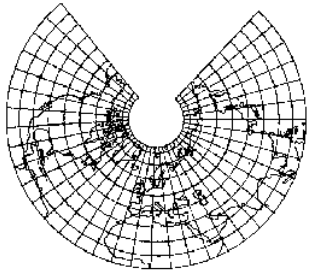
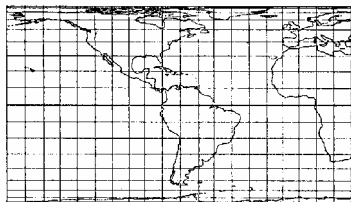
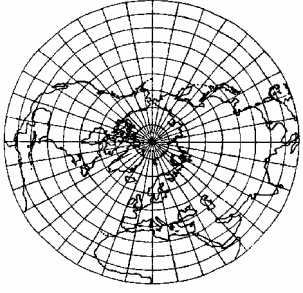
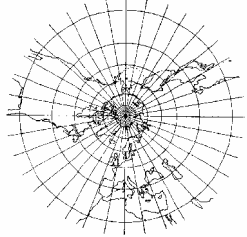
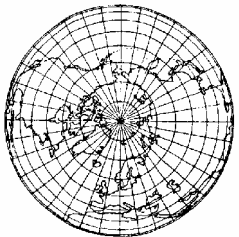
In Kartesischen Koordinaten

$\bar{x} = \sin \delta \sin \lambda$ $\bar{y} = \sin \delta \cos \lambda$
---------------------------------------------------------------------------

Man erkennt: Die Meridiane werden als Geradenbüschel abgebildet, die Breitenkreise als konzentrische Kreisschar. Das Verhältnis von Breitenkreisabbildung zum Urbild ist  $\lambda \sin \delta / \lambda \sin \delta = 1$ . Die Breitenkreise werden also längentreu abgebildet. Das Verzerrungsverhältnis im Meridian beträgt  $\cos \delta$ , denn  $a_d = (\cos d \cos l, \cos d \sin l, 0)$ , womit  $\bar{G} = \cos^2 \delta \cos^2 \lambda + \cos^2 \delta \sin^2 \lambda = \cos^2 \delta$ . Da  $G = R^2 = 1$ , erhält man nach ( 40 )  $h = \cos d$ .

Die orthographische Projektion wird vor allem in transversaler Lage für die Abbildung von Planeten verwendet.

Zum Abschluss des Kapitels über die echten Entwürfe folgt eine Zusammenstellung der nun beschriebenen Grundtypen mit den Abbildungsgleichungen. Die Abbildungen sind sämtlich dem Werk von Wagner [32] entnommen.

Eigenschaft	Kegelprojektionen	Zylinderprojektionen	Azimutale Projektionen
äquidistant/ längentreu	Abstandstreutreue Kegelprojektion  $m = \tan d_0 - (d_0 - d), c = n $	Quadratische Platkarte  $x = \lambda, y = \varphi$	Abstandstreue Azimutalprojektion  $m = d, c =  $
winkeltreu	Lambert-Gauss-Projektion  $m = \frac{\tan \delta_0}{\left(\tan \frac{\delta_0}{2}\right)^{\cos \delta_0}} \cdot \left(\tan \frac{\delta}{2}\right)^{\cos \delta_0}$ $c = n $	Mercatorprojektion  $x = l, y = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$	Stereographische Projektion  $m = 2 \tan \frac{\delta}{2}, c =  ,$
äquivalent/ flächentreu	Flächentreue Kegelprojektion  $m = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta}{\cos^2 \delta_0 - \cos \delta_0}}$ $c = n $	Lamberts Zylinderentwurf  $x = l, y = \sin j$	Flächentreue Azimutalprojektion  $m = 2 \sin \frac{\delta}{2}, c =  $
	Zentralprojektion - Gnomische Projektion  $m = \tan d, c =  $		Orthographische Projektion  $m = \sin d, c = \lambda$

### 3.3.4. NICHTKEGELIGE ENTWÜRFE

Als „unechte Entwürfe“ bezeichnet man in der Kartographie alle Abbildungen, die nicht echte Entwürfe darstellen; also solche Abbildungen, die die Meridiane nicht in Geraden oder die Breitenkreise nicht in Kreise oder Geraden überführen. Im Gegensatz zu den echten Entwürfen kann hier generell kein schematischer Weg eingeschlagen werden. Unechte Entwürfe werden vor allem für eine Abbildung der gesamten Erdkugel oder großer Teile der Erdoberfläche verwendet, wobei das Kriterium der Flächentreue im Vordergrund steht.

Eine kurze Auswahl der bekanntesten Entwürfe:

- Abweitungstreuer flächentreuer Kegelentwurf (Mercator-Bonnescher Entwurf)

Ausgangspunkt des Entwurfs ist der abstandstreue Kegelentwurf auf einen Berührungskegel mit dem Halbmessergesetz  $m = \tan \delta_0 - (\delta_0 - \delta)$ . Auch beim Mercator-Bonneschen Entwurf gilt die Forderung, dass das Längenverhältnis der Meridiane  $h = 1$  gleich bleibt. Das Halbmessergesetz bleibt somit unverändert. Das Längenverhältnis der Breitenkreise war  $k > 1$ . Durch eine längentreue Teilung der Breitenkreise erlangt man Abweitungstreue, dh. die Länge eines beliebigen Bogenstücks  $P_0P$  auf einem Breitenkreis muss mit der entsprechenden Länge auf der Kugel gleich lang sein. Man setzt die Länge des Bogens  $P_0P$  (Halbmesser mal Öffnungswinkel)  $= m c$  mit der entsprechenden Länge auf der Kugel  $= \lambda \sin \delta$  gleich, und erhält für  $c$

$$m c = \lambda \sin \delta$$

$$c = \frac{\lambda \sin \delta}{m} \quad (51)$$

Durch die beiden Gleichungen  $m = \tan \delta_0 - (\delta_0 - \delta)$  und  $c = \frac{\lambda \sin \delta}{m}$  ist der Entwurf in Polarkoordinaten gegeben. Analog zu den eigentlichen Kegelentwürfen lässt er sich durch  $\bar{x} = m \sin c$ ,  $\bar{y} = m - m \cos c$  ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  bezogen auf den Schnittpunkt eines jeden Breitenkreises mit dem Mittelmeridian) in rechtwinklige Koordinatenschreibweise überführen.

Die Geradlinigkeit der Meridiane und die Rechtschnittigkeit des Netzes kann nicht mehr erhalten werden.  $c = g(\lambda, \delta)$  ist nun eine Funktion mit zwei Variablen. Somit variiert der Richtungswinkel für jeden Punkt eines Meridians mit der Änderung des Polabstandes. Der Pol selbst ( $\delta = 0$ ) erscheint auf der Karte wieder als Punkt, da aufgrund von  $\sin 0 = 0$ ,  $l = 0$  wird.



Der Halbmesser des Pols beträgt durch Einsetzen in ( 51 ) für  $\delta = 0$   $m_p = \tan \delta_0 - \delta_0$ . Der Pol ist somit nicht gleichzeitig Nullpunkt des Koordinatensystems.

Für die Verzerrungen erhalten wir<sup>7</sup>

$$k = 1, \quad h = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{m^2} (m \cos \delta - \sin \delta)^2}, \quad \tan \theta' = \frac{\lambda}{m} (m \cos \delta - \sin \delta),$$

wobei  $\theta'$  der Winkel ist, den das Bild des Meridians mit dem Bild des Breitenkreises in der Abbildung einschließt ( bisher immer  $90^\circ$  ).

Die Winkelverzerrung beträgt

$$\tan \omega = \frac{1}{2} \tan \theta'$$

Das Meridianverhältnis und die Winkelverzerrung variieren wie schon bemerkt je nach geographischer Länge  $l$ , wobei die Winkelverzerrung auf jedem Breitenkreis linear mit der Länge wächst.

Je größer die Entfernung vom Nullmeridian, desto rascher wächst die Winkelverzerrung auf den einzelnen Breitenkreisen, mit Ausnahme des verzerrungsfreien Berührungsparallels  $\delta_0$ . Dadurch ergibt sich in der Karte eine starke „Schiefschnittigkeit“ der Randgebiete. „Das Netz ist ohne Einschränkung als schlecht zu bezeichnen.“ ( [32], Seite 162 ). Und dennoch war dieses Netz vor allem Ende des 18. und im 19. Jahrhundert sehr beliebt. Die flächentreue Abbildung mit längentreuen Breitenkreisen schuf **Rigobert BONNE** (1727-1795) 1752.

Auch beim abweitungstreuen Kegelentwurf kann man, wie bei seinem Ausgangspunkt, dem abstandstreuen Kegelentwurf, die Grenzfälle von  $d$ ,  $\delta_0 = 0$  und  $\delta_0 = 90^\circ$  untersuchen, um zu neuen Entwürfen zu gelangen. Den Grenzfall  $\delta_0 = 0$  bezeichnet man als Stab-Wernerschen Entwurf, der wegen seines herzförmigen Netzes sehr oft benutzt wurde. Genauer untersuchen wollen wir jedoch diesen Entwurf:

- Abweitungstreuer flächentreuer Zylinderentwurf (Mercator-Sanson-Entwurf)

Den Grenzfall  $\delta_0 = 90^\circ$  bezeichnet man als Mercator-Sanson-Entwurf. Er entspricht einem abweitungstreuen Zylinderentwurf. In Anlehnung an die Vorgangsweise beim vorigen Entwurf, gehen wir vom abstandstreuen Zylinderentwurf auf einen Berührungsparallel aus. Die Abbildungsgleichungen des abstandstreuen Zylinderentwurfs lauten  $\bar{x} = \lambda$ ,  $\bar{y} = \varphi$ .

---

<sup>7</sup> nach [32], Seite 161

Das Abstandsgesetz der Breitenkreise bleibt unverändert. Die Breitenkreise werden wieder längentreu geteilt. Wenn jeder Breitenkreis längentreu abgebildet werden soll, dann muss  $\bar{x} = \lambda \cos \varphi$  werden.

Somit haben wir den Entwurf mit folgenden Abbildungsgleichungen in Polarkoordinaten erhalten:

$$\bar{x} = \lambda \cos \varphi, \bar{y} = \varphi$$

Die Abbildung führt die Breitenkreise in Geraden, die Meridiane in Kosinuskurven über, deren Amplituden auf dem Äquator messbar sind. Der Pol erscheint in der Karte wieder als Punkt, da  $\cos 90^\circ = 0$ . Die Bilder der beiden Pole sind gemeinsame Knotenpunkte der Kosinuslinien. Auch bei diesem Kartenentwurf fällt wie zuvor die nach den Randgebieten hin stark zunehmende Schiefschnittigkeit auf. Betrachtet man die Kontur der Planisphäre, so wird sie von zwei Kosinuslinien mit dem Amplituden

$y_1 = -\pi$  bzw.  $y_2 = \pi$  gebildet. Da  $a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2a$ <sup>8</sup>, erhalten wir als Fläche der

Planisphäre  $A = 4\pi$ . Diese ist gleich der Oberfläche der Einheitskugel. Der Entwurf ist flächentreu. Die Flächentreue ist aber auch lokal gegeben, denn die partiellen Ableitungen der Bildfläche lauten:  $a_i = (\cos j, 0, 0)$ ,  $a_j = (-l \sin j, 1, 0)$ . Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform erhalten wir  $\bar{E} = \cos^2 j$ ,  $\bar{F} = -l \sin j \cos j$ ,  $\bar{G} = 1 + l^2 \sin^2 j$ . Somit gilt  $EG - F^2 = \bar{E} \bar{G} - \bar{F}^2$ . Durch Einsetzen in (40) erhält man mit  $R = 1$   $h = \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ .

Die Winkeltreue ist im allgemeinen nicht erfüllt, denn  $F$  ist nicht gleich 0. Nur für Punkte des Mittel-

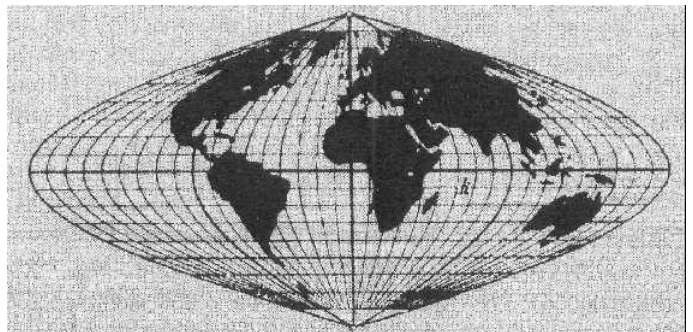


Abb. 47

meridians und des Äquators gilt sie. Wegen der Einfachheit der Abbildungsgleichungen eignet sich dieser Entwurf als Ausgangselement für eine Kartennetztransformation. (siehe Kapitel 3.3.4.1.)

Der Netzentwurf geht auf Mercator zurück, seit 1650 wurde er von **Nicolas SANSON D.Ä.** (1600-1667) vielfältig popularisiert.

<sup>8</sup> Aufgrund der Längentreue am Äquator gilt  $a = \rho$ . Die durch das Integral erhaltene Fläche ergibt durch die Eigenschaft der Flächentreue des Entwurfs durch Verdoppelung die Planisphärenfläche.

- Abstandsgleicher unechtzylindrischer Entwurf mit elliptischen Meridianen (Netz des Apianus)
- Flächentreuer unechtzylindrischer Entwurf mit elliptischen Meridianen (Mollweides Entwurf)

Der Versuch, die angesprochene Schiefschnittigkeit der vorigen Entwürfe zu verbessern, führt auf zwei weitere Entwürfe. Die Idee ist, für die Abbildung der Meridiane Kurven mit größerem Anstieg als der der Kosinuskurven einzusetzen. Bei den folgenden Entwürfen wurden jene Kurven verwendet, die gewährleisten, dass die Halbkugel als Kreis dargestellt wird. Teilt man wieder die Breitenkreise linear, erhält man für das Bild der Meridiane ein koaxiales Berührungsbüschel von Ellipsen. Führt man die längentreue Teilung beim Nullmeridian und Äquator durch, so weiss man, dass der Halbmesser des die Halbkugel begrenzenden Meridians  $\pi/2$  ist. Äquatorbild und Nullmeridianbild stellen dann die gemeinsamen Achsen der Ellipsen dar.

Die anderen Meridiane werden Ellipsen mit der großen Achse  $b = \pi/2$  und der kleinen Achse  $a = \lambda$ . Die Breitenkreise werden gerade Linien parallel zum Äquator mit ihrem wahren Abstand  $\bar{y} = \varphi$  von diesem.

Die Meridianellipse ist durch die Gleichung  $\frac{\bar{x}^2}{\lambda^2} + \frac{\bar{y}^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 1$  gegeben. Nach  $\bar{x}$  aufgelöst

ergibt sich

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\pi^2 - 4\varphi^2}, \bar{y} = \varphi$$

Im Folgenden führen wir eine neue Variable ein, sodass die Formeln für die Berechnung geeigneter werden. Dazu betrachten wir nochmals die Ellipsengleichung in

folgender Form  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \bar{x}^2 + \lambda^2 \bar{y}^2 = \lambda^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ . Setzt man  $\bar{x} = \lambda \cos \psi$ , so hat die

Gleichung die Form

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \lambda^2 \cos^2 \psi + \lambda^2 \bar{y}^2 = \lambda^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \text{ woraus } \bar{y} = \frac{\pi}{2} \sin \psi \text{ folgt.}$$

Nachdem laut Abbildungsgleichungen  $\bar{y} = \varphi$  gilt, erhält man für die Bestimmung der

$$\text{neuen Variablen } \psi \sin \psi = \frac{2\varphi}{\pi}.$$

Der Entwurf ist in folgender Form gegeben:

$$\bar{x} = f(\lambda, \psi), \bar{y} = (\psi), \psi = \phi(\varphi)$$

Für unseren aktuellen Entwurf :

$$\bar{x} = \lambda \cos \psi, \quad \bar{y} = \frac{\pi}{2} \sin \psi \text{ mit } \psi = \arcsin \frac{2\varphi}{\pi}$$

Der Entwurf wird auch „zweite Projektion des Apianus“ genannt.

Ersetzt man die Forderung der Abstandstreue durch die der Flächentreue, erhält man den Mollweideschen Entwurf. Erneut wollen wir, dass die Begrenzung der Halbkugel in einen Kreis übergeführt wird. Das Bild der Halbkugel, die von den Meridianen 90° östlicher und westlicher Länge gebildet wird, geht in einen Kreis mit dem Mittelpunkt im Schnittpunkt von Äquatorbild und Nullmeridianbild über. Die Erdkugel zeigt sich als Ellipse, wobei als Folge der Flächentreue die halbe Hauptachse der Länge des Kreisdurchmessers entspricht.

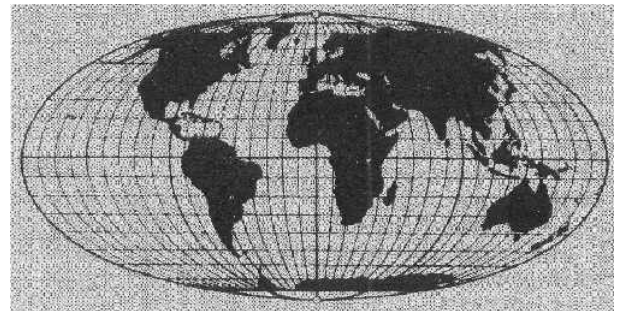


Abb. 48

Um die Flächentreue des Entwurfs zu gewährleisten, müssen die Flächeninhalte der vom begrenzenden Meridian umschlossenen Fläche und des entsprechenden Teils der Kugeloberfläche gleich sein.

Da mit dem Halbmesser  $r = \rho/2$  die Kreisfläche auf der Karte zu groß werden würde, fügt man ihm einen Faktor  $n < 1$  an. Dieser wird durch Gleichsetzen der entsprechenden Flächeninhalte ermittelt. Der Flächeninhalt der Kreisfläche

beträgt  $\frac{n^2 \pi^2}{4} \cdot \pi$ . Die halbe Kugeloberfläche mit dem

Einheitshalbmesser beträgt  $2\pi$ . Somit gilt

$$\frac{n^2 \pi^2}{4} \cdot \pi = 2\pi, n^2 = \frac{8}{\pi^2}$$

$$n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Als Radius erhalten wir nun  $\sqrt{2}$ .

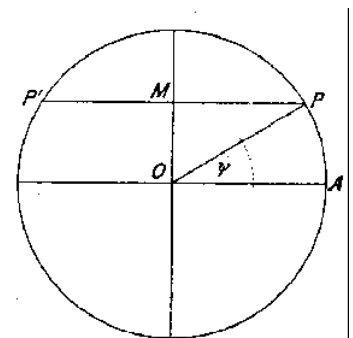


Abb. 49

Um die Flächentreue lokal zu gewährleisten, muss eine Beziehung zwischen dem Parameter  $\psi$  und der Breite  $\varphi$  aufgestellt werden.

Man betrachtet einen beliebigen Breitenkreis  $PP'$ . Die Fläche  $PM0A$  auf der Karte ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $PM0$  addiert mit dem Flächeninhalt des Sektors  $P0A$ .

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $PMO$  ist  $\frac{PM \cdot MO}{2} = \frac{\sin 2\psi}{2}$ ,

da  $PM = \sqrt{2} \cos \psi$  und  $MO = \sqrt{2} \sin \psi$ .

Als Flächeninhalt des Sektors  $POA$  erhält man  $\frac{2\psi}{2} = \psi$ .

Die der Fläche  $PMOA$  entsprechende Kugelfläche beträgt ein Viertel jener Kugelzonenfläche  $(\pi/2) \sin \varphi$ , die der Äquator und der Breitenkreis  $PP'$  einschließen.

Durch Gleichsetzen erhalten wir  $\psi + \frac{\sin 2\psi}{2} = \frac{\pi}{2} \sin \varphi$  oder  $2\psi + \sin 2\psi = \pi \sin \varphi$ .

Die Abbildungsgleichungen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  des Netzes werden mit dem Faktor  $n$  multipliziert, da sich die Achsen der Meridianellipsen von  $a = \lambda$  und  $b = \pi/2$  auf  $a = n\lambda$  und  $b = n\pi/2$  geändert haben.

Der Entwurf ist in der Form  $\bar{x} = f(\lambda, \psi)$ ,  $\bar{y} = g(\psi, \varphi)$ ,  $\Phi = (\psi, \varphi) = 0$  gegeben:

$$\bar{x} = \frac{\lambda 2\sqrt{2}}{\pi} \cos \psi, \quad \bar{y} = \sqrt{2} \sin \psi, \quad 2\psi + \sin 2\psi = \pi \sin \varphi$$

Bei der Anwendung dieses Entwurfes tritt also eine transzendente Beziehungsgleichung zwischen  $\psi$  und  $\varphi$  auf:  $2\psi + \sin 2\psi = \pi \sin \varphi$ , die nur eine näherungsweise Berechnung der Hilfsvariablen  $\psi$  aus  $\varphi$  gestattet.

Vergleicht man die Abbildungen 47 und 48 so ist die Verbesserung des Entwurfs gegenüber dem Mercator-Sanson-Entwurf im Bezug auf die Schiefschnittigkeit des Netzes offensichtlich. Die Spitzen im Pol des Mercator-Sanson-Entwurfs fallen beim Mollweideschen Entwurf weg. Die Kosinuskurven der Meridiane wurden durch die Meridianellipsen mit  $\varphi$  bis zu  $65,5^\circ$  steileren Verlauf ersetzt. Dies bemerkt man auch bei Betrachtung der Tabelle der Verzerrungsverhältnisse. Die geringere Winkelverzerrung beim Mollweideschen Entwurf lässt sich aus den folgenden Tabellen erkennen.

TABELLE 2<sup>9</sup>: Winkelverzerrung beim Mollweidschen Entwurf

$\varphi$	$l = 0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	108,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00
$80^\circ$	57,54	60,33	67,53	76,83	86,45	95,47	103,53	110,58	116,68	121,95
$70^\circ$	32,64	36,03	44,31	54,56	65,01	73,61	83,85	91,85	98,92	105,15
$60^\circ$	17,45	21,54	30,44	40,64	50,80	60,42	69,31	77,40	84,71	91,28
$50^\circ$	7,00	12,39	21,46	30,85	39,99	48,70	56,88	64,48	71,51	77,92
$40^\circ$	0,47	8,01	15,93	23,69	31,25	38,54	45,51	52,15	58,44	64,36
$30^\circ$	5,76	8,24	13,10	18,49	23,99	29,45	34,83	40,07	45,16	50,07
$20^\circ$	9,30	10,08	12,11	14,88	18,03	21,38	24,81	28,28	31,75	35,20
$10^\circ$	11,34	11,51	11,98	12,73	13,71	14,87	16,17	17,58	18,57	20,62
$0^\circ$	12,01	12,01	12,01	12,01	12,01	12,01	12,01	12,01	12,01	12,01

 TABELLE 3<sup>10</sup>: Im Vergleich dazu die Winkelverzerrung beim Mercator-Sanson-Entwurf

$j$	$l = 0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$
$90^\circ$	0	19,80	38,50	55,27	69,83	82,22	92,64	101,40	108,78	115,04
$80^\circ$	0	19,50	37,95	54,55	69,02	81,35	91,76	100,54	107,95	114,24
$70^\circ$	0	18,63	36,32	52,40	66,53	78,71	89,08	97,89	105,37	111,77
$60^\circ$	0	17,18	33,63	48,78	62,32	74,46	84,41	93,23	100,82	107,36
$50^\circ$	0	15,23	29,95	43,72	56,28	67,53	77,47	86,21	93,85	100,54
$40^\circ$	0	12,80	25,30	37,20	48,33	58,58	67,89	76,29	83,82	90,55
$30^\circ$	0	9,97	19,80	29,35	38,50	47,15	55,27	62,84	69,84	76,29
$20^\circ$	0	6,83	13,62	20,30	26,87	33,24	39,41	45,36	51,05	56,49
$10^\circ$	0	3,47	6,93	10,35	13,83	17,19	20,57	23,90	27,20	30,45
$0^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Den Namen erhielt das Netz nach dem deutschen Mathematiker **Karl MOLLWEIDE** (1774-1825), der es 1805 veröffentlichte. Verbreitet wurde es ab 1857 durch eine Empfehlung des französischen Kartographen **Jaques BABINET** (1794-1873).

<sup>9</sup> Daten aus [32], Seite 173

<sup>10</sup> Daten aus [32], Seite 166

## 3.3.4.1. Transformation von Kartennetzen

( Das Umbeziffern von Kartennetzen )

Das Verfahren des Umbezifferns von Kartenentwürfen ist grundsätzlich eine Zuweisung anderer Ordnungszahlen. Nach einem bestimmten Gesetz werden die Netzlinien umbeziffert, mit anschließender Maßstabsregulation auf das alte Netz. Die Vorgangsweise wird anhand des abstandstreuen Zylinderentwurfs kurz erläutert:

Die Abbildungsgleichungen lauten  $\bar{x} = \lambda$ ,  $\bar{y} = \varphi$ . Dem Entwurf wird ein Ausschnitt entnommen. Um die gesamte Erdkugel auf diesen Ausschnitt abzubilden, werden die Gradnetzlinien umbeziffert, denn die Randkurven des neuen Entwurfs müssen den geographischen Längen  $\pm 180^\circ$  und den geographischen Breiten  $\pm 90^\circ$  entsprechen.

Im ursprünglichen Netz wählt man zum Beispiel einen Ausschnitt von  $\lambda = 0^\circ$  bis  $\lambda = 120^\circ$  und  $\varphi = 0^\circ$  bis  $\varphi = 75^\circ$ , wobei der Breitenkreis  $75^\circ$  mit  $90^\circ$  beziffert wird. Nun ist es Aufgabe, alle anderen Breitenkreise in dem Ausschnitt von  $\varphi = 0^\circ$  bis  $\varphi = 75^\circ$  linear anzuordnen. D.h. man benötigt einen Faktor  $m$  folgender Art:  $\bar{y} = m 90^\circ = 75^\circ$ , d.h.  $m = 5/6$ . Dieselbe Umbezifferung widerfährt den Meridianen:  $\lambda = 120^\circ$  soll mit  $180^\circ$  beziffert werden.  $\bar{x} = n 180^\circ = 120^\circ \Rightarrow n = 3/2$ . Das neue Netz wird somit durch die Formeln  $\bar{x} = 3/2 \lambda$ ,  $\bar{y} = 5/6 \varphi$  gebildet und hat die Größe des Ausgangsgebiets. Da die Fläche geringer ist als die des Ausgangsnetzes, also einen kleineren Maßstab aufweist, muss man noch den Maßstabsfaktor  $c$  einführen, um den originalen Maßstab auch für das neue Netz zu gewährleisten:

Fläche eines Teilstück des Ausgangsnetzes:  $\bar{x} \bar{y} = \lambda \varphi$

Entsprechende Fläche im neuen Netz:  $\bar{x} \bar{y} = c n \lambda c m \varphi$ . Setzt man die Flächen gleich,

so erhält man  $c = \frac{1}{\sqrt{mn}}$ .

Die Abbildungsgleichungen des neuen Netzes lauten

$$\begin{aligned} \bar{x} &= cn\lambda = \frac{3\sqrt{5}}{5} \lambda \\ \bar{y} &= cm\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2} \varphi \end{aligned}$$

Die Abstandstreue der Breitenkreise geht verloren, nur Abstandsgleichheit bleibt erhalten.

- Der Aitoffsche Entwurf

Der Aitoffsche Entwurf entsteht als umbezifferter abstandstreuer Azimutalentwurf.

Die rechtwinkligen Koordinaten des abstandstreuen transversalen Azimutalentwurfs lauten

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \delta \sin a \\ \bar{y} &= \delta \cos a\end{aligned}$$

wobei  $\cos \delta = \cos \lambda \cos \varphi$ ,  $\cos a = \sin \varphi / \sin \delta$

Die Abbildungsgleichungen werden nicht in Funktionen von  $\varphi$  und  $\lambda$  angegeben, da dadurch der schwer zu berechnende Ausdruck  $\delta = \arccos(\cos \lambda \cos \varphi)$  entstehen würde. Daher wird die Parameterdarstellung  $x = f(\delta, g)$ ,  $y = g(d, a)$ ,  $d = (\varphi, a)$ ,  $a = v(\varphi, \lambda)$  angewandt.

Aufgrund der besseren Übersichtlichkeit bezeichnen wir die Breitenkreise des ursprünglichen Entwurfes mit  $\psi$  und die Meridiane mit  $\bar{\lambda}$ . Die Meridianumbezeichnung wird wie zuvor mittels der Gleichung  $\bar{\lambda} = n\lambda$  durchgeführt. Der Nullmeridian soll linear abstandstreu geteilt werden. Dies leistet die Transformation  $\psi = m\varphi$ . Wir erhalten somit  $\cos \delta = \cos(n\lambda) \cos(m\varphi)$ ,  $\cos a = \sin(m\varphi) / \sin \delta$ ,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{k}{\sqrt{mn}} \delta \sin \alpha \\ \bar{y} &= \frac{1}{k\sqrt{mn}} \delta \cos \alpha\end{aligned}$$

Für einen bestimmten Entwurf mit den anschließend beschriebenen Eigenschaften ist es notwendig, die Konstanten  $k$ ,  $m$  und  $n$  zu bestimmen: Unser ausgewählter Ausschnitt aus dem Ausgangsentwurf wird durch  $\psi_1$  und  $\bar{\lambda}_1$  begrenzt. Der Pol soll als Punkt abgebildet werden. Die Breitenkreise von  $0$  bis  $\pi/2$  sollen linear im Ausschnitt  $0$  bis  $\psi_1$  untergebracht werden. Für  $m$  ergibt sich damit  $m = \frac{2\psi_1}{180^\circ}$ .  $m$  bestimmt das Verhältnis des Äquators zur Pollinie. Vergrößert man  $m$ , vergrößert sich damit  $\psi_1$  und die Pollinie verkürzt sich. Bei  $m = 1$ ,  $\psi_1 = 90^\circ$  wird der Pol als Punkt wiedergegeben.



Wir berechnen  $n$  in der selben Weise wie zuvor und erhalten  $n = \frac{\bar{\lambda}_1}{180^\circ}$ .  $n$  beeinflusst die Krümmung der Breitenkreise. Vergrößert man  $n$ , so verstärkt man die Krümmung der Breitenkreise im umbezahlten Entwurf gegen den Rand hin. Aus den allgemeinen Abbildungsgleichungen erkennt man, dass der sogenannte Verdehnungsfaktor  $k$  noch zu bestimmen ist. Er reguliert das Verhältnis von Nullmeridian und Äquator, die im Verhältnis  $p$  stehen.

Dabei gilt für den Äquator: Aus  $\lambda = 180^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$  folgt  $\cos \delta = \cos \bar{\lambda}_1$ , also  $\delta = \bar{\lambda}_1$  und  $\cos a = 0$  impliziert  $a = 0$ , während sich für den Nullmeridian für  $\lambda = 0^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$   $\cos \delta = \cos \psi_1$  und  $\cos a = 1$  ergibt, d.h.  $\delta = \psi_1$  und  $\alpha = 90^\circ$ . Somit wird die Länge des Äquators  $\bar{x} = \frac{k\bar{\lambda}_1}{\sqrt{mn}}$  und die Länge des Nullmeridians  $\bar{y} = \frac{\psi_1}{k\sqrt{mn}}$ . Für das Verhältnis  $p$

erhalten wir:

$$\frac{k^2 \bar{\lambda}_1}{\psi_1} = p, \quad k = \sqrt{\frac{p\psi_1}{\lambda}}$$

Setzt man  $n = \frac{1}{2}$ , folgt  $\bar{\lambda}_1 = 90^\circ$ . Äquator und Nullmeridian mögen das Verhältnis  $p = 2$  haben. Daraus folgt  $k = \sqrt{\frac{2 \cdot 90}{90}} = \sqrt{2}$ .

Wir erhalten den Entwurf mit folgenden Abbildungsgleichungen

$\bar{x} = 2 \sin \alpha, \quad \bar{y} = \delta \cos \alpha$ $\cos \delta = \cos \frac{\lambda}{2} \cos \varphi, \quad \cos \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 3.3.4.2. Mischkarten

Ein zweites Verfahren, um aus bekannten Kartennetzentwürfen neue zu erstellen, ist das sogenannte Mischen von Karten. Dabei werden zwei oder mehr Entwürfe miteinander kombiniert. Bei dieser Kombination handelt es sich in den meisten Fällen um die Mittelwertbildung der Abbildungsfunktionen oder der Bildkoordinaten der Ausgangsentwürfe. Eine der bekanntesten Mischkarten ist der Entwurf von WINKEL, entstanden durch die Mischung des Äitoffschen Entwurfs und des abstandstreuen Zylinderentwurfs mit zwei längentreuen Breitenkreisen.

Abbildungsgleichungen des Äitoffschen Entwurfs:

$$\bar{x} = 2\delta \sin \alpha, \bar{y} = \delta \cos \alpha$$

$$\cos \delta = \cos \frac{\lambda}{2} \cos \varphi, \cos \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}$$

Abbildungsgleichungen des abstandstreuen Zylinderentwurfs mit zwei längentreuen Breitenkreisen:

$$\bar{x} = n\lambda, \bar{y} = \varphi$$

Das arithmetische Mittel ist:

$$\bar{x} = \frac{n\alpha + 2\delta \sin \alpha}{2} = \delta \sin \alpha + \frac{n\lambda}{2}, \bar{y} = \frac{\varphi + \delta \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \delta = \cos \frac{\lambda}{2} \cos \varphi, \cos \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}$$

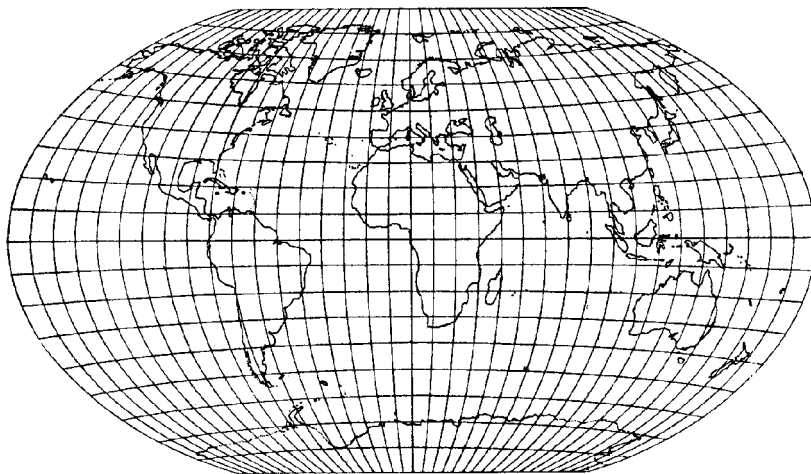


Abb. 50

#### 4. SCHLUSSBETRACHTUNG

In der Kartographie verblüfft die Vielzahl von Entwürfen, sodass in dieser Arbeit nur ein repräsentativer Querschnitt mit den wichtigsten Entwürfen geboten werden konnte.

„Nach aktuellen statistischen Untersuchungen sind in den zurückliegenden 100 Jahren etwa 500 neue kartographische Abbildungsverfahren von Geodäten, Kartographen und Wissenschaftlern anderer Disziplinen erarbeitet worden.“ ( [26], Seite 159 ) Die Zahl hat sich seit 1988, in dem Jahr, in dem Schröder dies schrieb, sicherlich noch bedeutend vergrößert.

Jeder Entwurf hat jedoch aufgrund seiner spezifischen Eigenschaften eine Existenzberechtigung, oder hatte sie zumindest über einen Zeitraum, bevor ein geeigneter Entwurf ihn ablöste. Die Fortschritte der Kartographie waren mit den Fortschritten in der Mathematik verbunden, die Kartographie lieferte wichtige Impulse für die Mathematik, wie das Auffinden der Abbildungsgleichungen für den winkeltreuen Zylinderentwurfes von Mercator, der Mathematikern über Jahrhunderte Aufgabe gab.

Heutzutage benutzt man moderne Computerprogramme zur Erarbeitung optimaler Entwürfe, meist Mischentwürfe, für bestimmte Anliegen, die in der Gesellschaft in Bezug auf Karten immer gegeben sind. Karten stellen als Informationsträger ein wichtiges Kommunikationsmittel dar, aber auch ein Mittel zur Manipulation, bei geeignetem Einsatz der Eigenschaften der Winkeltreue, Längentreue, Flächentreue.

ANHANG

**EINE ANWENDUNG DER GEOGRAPHIE AUF DIE MATHEMATIK**

**Die Geschichte des Integrals der Sekansfunktion**

Wir wollen das Integral  $\int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$  berechnen. Der Ausdruck  $\frac{1}{\cos \varphi} := \sec \varphi$  wird Sekans des Winkels  $\varphi$  genannt; das Integral wird deshalb auch als Sekansintegral bezeichnet.

Wir sind dem Integral  $\int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$  schon bei der Berechnung der Gleichung der Loxodrome (siehe Seite 67) begegnet und auch bei der Berechnung der Abbildungsfunktion der winkeltreuen zylindrischen Abbildung, also bei der Mercatorprojektion, bei der die Differentialgleichung  $d\bar{y} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$  zu lösen war (siehe Seite 93). Die Lösung des Integrals war

$$\int \sec \varphi d\varphi = \int \frac{1}{\cos \varphi} = \ln \left| \frac{1}{\cos \varphi} + \tan \varphi \right| + c \quad (1)$$

Durch Differenzieren kann man die Richtigkeit von (1) prüfen. Doch wie findet man die Stammfunktion? Versuchen wir die klassischen (Schul-) Methoden wie Substitution und Partielle Integration anzuwenden:

Substitution

$$\int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi \quad \text{Substitution : } u = \cos \varphi, \quad d\varphi = du / (-\sin \varphi)$$

$$\int \frac{du}{u (-\sin \varphi)} \quad \text{nicht elementar integrierbar}$$

Partielle Integration

$$\int \frac{1}{\cos \varphi} \cdot 1 d\varphi = \varphi \cdot \frac{1}{\cos \varphi} - \int \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \varphi \frac{1}{\cos \varphi} - \int \varphi \cdot \tan \varphi \cdot \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi \quad \text{nicht elementar integrierbar}$$

Somit versagen diese Integrationsmethoden.

Suchen wir nach den historischen Wurzeln des Integrals (1), so sehen wir, dass diese in der Kartographie liegen und diese Wissenschaft ist es auch, die uns zu einer Lösung verhelfen wird.

Im Jahr 1645 entdeckten Mathematiker und Kartographen im Zuge ihrer Beschäftigung mit der Mercatorprojektion die Formel <sup>1</sup>

$$\int \sec \varphi \, d\varphi = \ln \left| \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c \quad (2)$$

Doch was veranlasste die Wissenschaftler, sich mit der Mercatorkarte auseinanderzusetzen ? Was bewegte MERCATOR zu seiner winkeltreuen Kartenprojektion ? Gehen wir zur Beantwortung dieser Fragen noch einen Schritt zurück – in das Zeitalter der frühen Schifffahrt.

Seit der Mitte des 2. Jahrhunderts v. Chr., der Zeit PTOLEMAIOS', existierten Zylinderprojektionen zur Abbildung der Erde in die Ebene. Auf diesen quadratischen Plattkarten mit rechtwinkligem Gitternetz entspricht die Strecke eines Breitengrades der Strecke eines Längengrades. Begrenzt auf ein kleines Gebiet, wie zum Beispiel auf die Mittelmeerregion, waren diese Karten zur Orientierung in der Schifffahrt durchaus geeignet. Im Zeitalter der Entdeckungen jedoch wurden die Distanzen ausgeweitet und Regionen höherer Breitengrade erforscht. Dies führte dazu, dass Navigationsfehler aufgrund der Verwendung dieser Plattkarten offensichtlich wurden.

Seit Beginn des 14. Jahrhunderts war der Kompass ein weit gebräuchliches Hilfsmittel der Schifffahrt. Strecken konnten somit sehr einfach durch Entfernungen und Kompassrichtung angegeben werden. Dabei wurden Linien konstanter Kompassrichtung, Loxodrome, von den Schifffahrern als „Rauten – Linien“ bezeichnet. Die Schifffahrer planten ihre Reise, indem sie auf der Karte zwischen Ursprungsort und Zielort eine gerade Linie zogen und die Kompassrichtung, der man folgen sollte, ablasen. Eine Karte, die Loxodrome als gerade Linien abbildet, hätte in dieser Hinsicht eine große Erleichterung für die Schifffahrt bedeutet.

---

<sup>1</sup> Mittels folgender Umformung ist die Gleichheit der Ausdrücke (1) und (2) gezeigt:  $\tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\varphi}{2} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \tan \frac{\pi}{4}} =$

$$= \frac{1 + \tan \frac{\varphi}{2}}{1 - \tan \frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \sec \varphi + \tan \varphi$$

Gerard MERCATOR beschäftigte sich mit diesem Problem und entwarf eine Karte, in der der Abstand zwischen den einzelnen Breitenkreisen wuchs, je größer ihr Abstand zum Äquator war. MERCATOR selbst drückte seine Vorgangsweise so aus:

„In making this representation of the world we had ... to spread on a plane the surface of the sphere in such a way that the positions of places shall correspond on all sides with each other both in so far as true direction and distance are concerned and as concerns correct longitudes and latitudes ... With this intention we have had to employ a new proportion and a new arrangement of the meridians with reference to the parallels. ... It is for these reasons that we have progressively increased the degrees of latitude towards each pole in proportion to the lengthening of the parallels with reference to the equator.”  
( [1], Seite 163 )

Nachdem er erkannt hatte, dass seine ursprüngliche Intention, eine winkel- und längentreue Abbildung der Sphäre in die Ebene zu schaffen, nicht verwirklicht werden konnte, entschied er sich für die Konstruktion einer winkeltreuen Karte, die den Vorteil hätte, dass Loxodrome als gerade Linien wiedergegeben werden. Bis heute ist nicht geklärt, welche Methode MERCATOR anwendete, um die Entfernungen zwischen den parallelen Breitenkreisen progressiv auszuweiten. Thomas HARRIOT (1560 – 1621) lieferte in den späten 1580ern eine mathematische Erklärung der Vorgangsweise, aber seine Ergebnisse wurden weder publiziert noch beeinflussten sie spätere Arbeiten.

Eine mathematische Methode zur Konstruktion einer Mercatorkarte stammt von **Edward WRIGHT** (1561 – 1615), publiziert 1599 in „*Certaine Errors in Navigation* [...]“. Die entscheidende Errungenschaft von WRIGHT war es zu zeigen, dass, um Winkeltreue zu gewährleisten, die Breitenkreise  $j$  bei der Abbildung auf die Karte durch den Faktor  $\sec j$  gestreckt werden müssen. Betrachten wir seine Argumentation näher.

Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt der Erde, wobei AB eine Strecke auf dem Äquator bezeichnet, C den Mittelpunkt und T den Nordpol der Erdkugel. Der Breitenkreis  $j$  mit dem Mittelpunkt P beinhaltet die Bogenstrecke MN zwischen den Meridianen AT und BT.

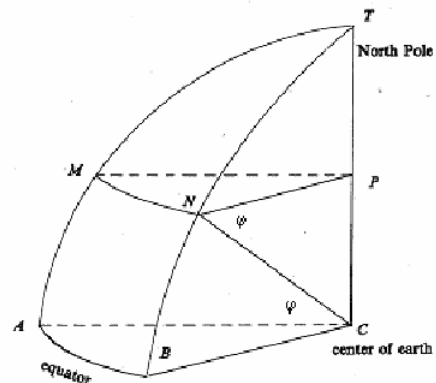


Abb. 1

Da die Strecken BC und NP parallel sind, folgt  $\angle PNC = j$ . Aufgrund der Ähnlichkeit der sphärischen Dreiecke ABC und MNP gilt

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{NC}{NP} = \sec \varphi \quad \text{oder} \quad AB = MN \sec j.$$

Möchte man nun die Strecke MN in einer Karte einzeichnen, muss, damit alle Breitenkreise auf der Karte als gleich lange Strecken erscheinen, MN horizontal um den Faktor  $\sec j$  gestreckt werden. Anders ausgedrückt: die Breitenkreisverzerrung auf der Karte beträgt  $1/\cos j$ . (WRIGHT selbst zeigte, dass  $BC = NP \sec j$ .)

Um nun eine Karte konstruieren, die die Winkelgrößen erhält, muss eine Loxodrome als jene Linie, die in ihrem Verlauf mit jedem Meridian denselben Schnittwinkel aufweist, auch auf der Karte als Kurve erscheinen, die alle Kartenmeridiane unter demselben Winkel schneidet. Da die Bilder der Meridiane auf der Karte eine Schar von parallelen Linien bilden und jede Kurve, die eine solche Schar in einem festen Winkel schneidet, eine gerade Linie ist, werden Loxodrome auf der Karte als gerade Linien abgebildet. Umgekehrt, wenn Loxodrome als gerade Linien abgebildet werden, werden die Winkel erhalten und die verwendete Abbildungsfunktion muss konform sein.

Um nun die Winkel zu erhalten, muss die Karte nicht nur horizontal um  $\sec \varphi$  gestreckt werden, sondern auch vertikal um denselben Faktor. In der Diplomarbeit wurde diese vertikale Streckung mit dem Argument, dass bei konformen Abbildungen die Breitenkreisverzerrung  $k$  mit der Längengradverzerrung  $h$  übereinstimmen muss, begründet.

Rickey-Tuchinsky führen in [1] folgende Argumentation, die mithilfe infinitesimaler Größen arbeitet, an:

Betrachten wir die Entfernung  $D(j)$  auf der Karte vom Äquator zum Breitenkreis  $j$ . Eine infinitesimale Veränderung  $dj$  von  $j$  auf der Erdkugel führt zu einer infinitesimalen Veränderung  $dD$  der Strecke  $D$  auf der Karte. Eine vertikale Streckung beim Abbildungsvorgang um  $\sec j$  bedeutet somit

$$dD = \sec j \, dj$$

Die Streckung um  $\sec j$  führt eine infinitesimale Figur auf dem Globus in eine ähnliche Figur auf der Karte über. Die Winkel werden beim Abbildungsvorgang also erhalten, die entstehende Karte ist konform. Umgekehrt muss, um eine konforme Karte zu erhalten, der vertikale Multiplikator  $\sec j$  sein.

Auf der Karte ergibt sich die Entfernung des Breitenkreises  $j$  vom Äquator durch Lösen der Differentialgleichung  $dD$  und entspricht folglich dem Integral  $D(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sec \varphi \, d\varphi$ .

WRIGHT selbst drückte es folgendermaßen aus:

„the parts of the meridian at euery poynt of latitude must needs increase with the same proportion wherewith the Secantes or hypotenusae of the arke, intercepted betweene those pointes of latitude and the aequinocctiall [equator] do increase. ... For ... by perpetuall addition of the Secantes answerable to the latitudes of each point or parallel vnto the summe compounded of all former secantes, ... we may make a table which shall shew the sections and points of latitude in the meridians of the nautical planisphaere: by which sections, the parallels are to be drawne.” ([1], Seite 164)

Für die Berechnung der im Zitat angesprochenen Tabelle der „meridional parts“, die die Abstände zwischen den verschiedenen Breitenkreisen auf den Meridianen angibt, setzte WRIGHT  $dj = 1'$  und berechnete die der RIEMANN-Summe entsprechende Approximation des Sekans-Integrals für Breiten unter  $75^\circ$ . Diese Tabelle ermöglichte Kartographen die Konstruktion von Mercatorkarten.

WRIGHT entwarf weiters folgendes physikalisches Modell zur Mercatorkarte: Die Erde wird von einem Zylinder umwickelt, der sie im Äquator berührt. Schwillt die Erde so an, dass sie die ganze Zylinderfläche in allen Punkten berührt, werden die Punkte der Erde mit den Punkten auf dem Zylinder, mit denen sie Kontakt haben, identifiziert. Durch Aufrollen des Zylinders erhält man eine Mercatorkarte. Diese Vorstellung ist von der Zylinderprojektion im eigentlichen Sinn, bei der eine Lichtquelle im Mittelpunkt der Erde die Erdkugel auf den berührenden Zylinder projiziert, zu unterscheiden. Letztere ist nicht winkeltreu.

Wir wissen nun, dass die Entfernung auf der Karte vom Äquator zum Breitenkreis  $j$  durch das Sekans-Integral gegeben ist. Es bleibt zu zeigen, dass die Entfernung auch

durch  $\ln \left| \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$  gegeben ist, und somit dieser Ausdruck das Ergebnis des Sekans-

Integrals ist.

1614 publizierte John NAPIER seine Arbeit über Logarithmen. Zwei Jahre später veröffentlichte WRIGHT die englische Übersetzung: „*A Description of the Admirable Table of Logarithms*“, die eine Logarithmentabelle der Sinusfunktion enthielt.



1620 publizierte **Edmund GUNTER** (1581-1626) eine Tabelle der gebräuchlichen Logarithmen der Tangensfunktion in seinem „*Canon triangulorum*“. In den nächsten zwanzig Jahren folgte die Veröffentlichung zahlloser logarithmischer Tafeln der Tangensfunktion. ( Dagegen war zu MERCATORS Zeiten nicht einmal eine Tabelle der Sekansfunktionswerte erhältlich. )

In den 40er Jahren des 17. Jahrhunderts entdeckte **Henry BOND** (um 1600 – 1678), der sich selbst als „teacher of navigation, survey and other parts of the mathematics“ bezeichnete, durch Vergleichen von WRIGHT’s Tabelle der „meridional parts“ mit einer log-tan Tabelle viele Übereinstimmungen.

Dieser Zufall führte ihn zur Vermutung, dass  $D(\varphi) = \ln \left| \tan \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ , die er 1645 in „Norwood’s Epitome of Navigation“ veröffentlichte. Durch die Korrespondenz von **John COLLINS** (1625-1683) wurde sie weit verbreitet und ihr Beweis zu einem der hervorstechendsten offenen Probleme in der Mitte des 17. Jahrhunderts. Viele Mathematiker wie COLLINS selbst, **Nicolaus MERCATOR** (1620-1687) (nicht verwandt mit Gerard MERCATOR), **Alexander WILSON** (1714-1786), **William OUGHTRED** (1574-1660) und **John WALLIS** (1616-1703) versuchten sich daran. Auch NEWTON kannte die Vermutung, wie aus seinen Arbeiten im Jahr 1665 hervorgeht.

Nicolaus MERCATOR schrieb im allerersten Band der „Philosophical Transactions of the Royal Society of London“, er sei „willing to lay a Wager against any one or more persons that have a mind to engage ... Whether the Artificial [logarithmic] Tangent-line be the true Meridian-line, yea or no?“ ( [1], Seite 165 ) und setzte damit offiziell einen Preis auf den Beweis der Vermutung aus.

Der erste, dem ein Beweis gelang, war **James GREGORY** (1638-1675) in seinen „*Exercitationes Geometricae*“, 1668. Nach **TURNBULLS’** (1885-1961) moderner Übersetzung beurteilt, verwendete er dabei eine lange Reihe von Folgerungen und komplizierte Verhältnisse.

Den ersten einfachen Beweis, der zugleich die erste Anwendung von partieller Integration darstellt, lieferte **Isaac BARROW** (1630-1677) in seinen „*Geometrical Lectures*“. Modern formuliert, verläuft er folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \int \sec \varphi \, d\varphi &= \int \frac{1}{\cos \varphi} \, d\varphi \\
 &= \int \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi = \int \frac{\cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\
 &= \int \frac{\cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)(1 + \sin \varphi)} \, d\varphi \Rightarrow \text{Partialbruchzerlegung} \\
 &\quad \frac{A}{(1 - \sin \varphi)} + \frac{B}{(1 + \sin \varphi)} = \frac{A(1 + \sin \varphi) + B(1 - \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi)(1 - \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)(1 - \sin \varphi)} \\
 &\quad A + B + (A - B)\sin \varphi = \cos \varphi \Rightarrow \text{Koeffizientenvergleich} \\
 &\quad A + B = \cos \varphi \\
 &\quad A - B = 0 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \cos \varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \, d\varphi + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \, d\varphi \\
 &\quad \int \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \, d\varphi \Rightarrow \text{Substitution: } u = 1 - \sin \varphi \\
 &\quad u' = \frac{du}{d\varphi} = -\cos \varphi \\
 &\quad \int \frac{\cos \varphi}{u} \cdot \frac{du}{(-\cos \varphi)} = -\ln|u| + c = -\ln|1 - \sin \varphi| + c \\
 &\quad \text{durch analoge Substitution: } \int \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \, d\varphi = \ln|1 + \sin \varphi| + c \\
 &= \frac{1}{2} [-\ln|1 - \sin \varphi| + \ln|1 + \sin \varphi|] + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin \varphi)^2}{1 - \sin^2 \varphi} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin \varphi)^2}{\cos^2 \varphi} \right| + c = \ln \left| \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right| + c = \ln \left| \frac{1}{\cos \varphi} + \tan \varphi \right| + c \\
 &= \ln |\sec \varphi + \tan \varphi| + c \qquad \hat{a}
 \end{aligned}$$

Damit war die Richtigkeit der Formel ( 1 ) bewiesen und das Ziel, die Lösung des Integrals, das die Gedanken vieler Mathematiker über Jahrhunderte lang beschäftigt hatte, erreicht.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALEXANDROW, A.D. (1959): Kurven und Flächen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin – Leipzig.
- [2] BAGROW, L. ( 1951): Die Geschichte der Kartographie, Safari-Verlag, Berlin.
- [3] BAUER, M. (1997): Vermessung und Ortung mit Satelliten, Wichmann-Verlag, Heidelberg.
- [4] BLASCHKE, W; LEICHTWEIß, K. (1973): Elementare Differentialgeometrie, 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg - New York.
- [5] BLASCHKE, W; REICHARDT, H. (1960): Einführung in die Differentialgeometrie, Springer Verlag, Berlin – Göttingen - Heidelberg.
- [6] BIGALKE, H.-G. (1984): Kugelgeometrie, Otto Salle Verlag, Frankfurt am Main/ Verlag Sauerländer, Aarau.
- [7] CANTERS F., DECLEIR H. (1989): The World in Perspective. A directory of world map projections. John Wiley&Sons. Chichester.
- [8] do CARMO, M. P. (1983): Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg-Studium, Bd. 55, Aufbaukurs Mathematik, Friedr. Vieweg&Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig.
- [9] FILLER, A. (1993): Euklidische und nichteuklidische Geometrie, Mathematische Texte, Bd 7, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Leipzig-Wien, Zürich.
- [10] GRAF, U. (1938): Sphärische Geometrie und Kartenentwürfe, Quelle&Meyer, Leipzig.
- [11] HAACK, W. (1955): Elementare Differentialgeometrie, Birkhäuser Verlag, Basel – Stuttgart.
- [12] HAKE G. (1994): Kartographie, 7. Auflage, de Gruyter-Verlag, Berlin-New York.
- [13] HESSENBERG, G. (1899): Ebene und Sphärische Trigonometrie, Göschen´sche Verlagshandlung, Leipzig.
- [14] HOSCHEK, J. (1969): Mathematische Grundlagen der Kartographie, Bibliographisches Institut Mannheim/ Zürich, Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim-Zürich.
- [15] JENNINGS G.A. (1994), Modern Geometry with Applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

- [16] KLOTZEK, B. (1997): Einführung in die Differentialgeometrie, 3. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun – Frankfurt am Main.
- [17] KREYSZIG, E. (1957): Differentialgeometrie, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig.
- [18] KUNTZ E. (1990): Kartennetzentwurfslehre, Grundlagen und Anwendungen, 2. Auflage, Wichmann, Karlsruhe.
- [19] LEITHÄUSER, Joachim (1958) : Mappae Mundi, Die geistige Eroberung der Welt, Safari-Verlag Carl Boldt und Reinhard Jaspert, Berlin.
- [20] LIETZMANN W. (1949): Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
- [21] MOSER, Barbara (1994): Sphärische und Elliptische Geometrie, Diplomarbeit, Institut für Mathematik, Universität Wien.
- [22] REICHARDT, H. (1976): Gauß und die nicht-euklidische Geometrie, Teubner-Verlag, Leipzig.
- [23] REINHARDT F. SOEDER, H. (1994): dtv-Atlas zur Mathematik, Bd. 2, 9. Auflage, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH&Co. KG, München.
- [24] SAMMET G. (1990): Der Vermessene Planet. Bilderatlas zur Geschichte der Kartographie, Gruner+Jahr AG&Co., Hamburg.
- [25] SCRIBA C.J., SCHREIBER P. (2001): 5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [26] SCHRÖDER, E. (1988): Kartenentwürfe der Erde, Teubner-Verlag, Leipzig.
- [27] SIGL, R. (1969): Ebene und Sphärische Trigonometrie, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main.
- [28] STEINERT K.-G. (1977): Sphärische Trigonometrie mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie, Teubner Verlag, Reihe Mathematik, Bd. 8. , Leipzig.
- [29] STRUBECKER, K. (1958): Differentialgeometrie II, Theorie der Flächenmetrik, de Gruyter Verlag, Berlin.
- [30] OSSERMANN, R. (1997): Geometrie des Universums, Friedr. Vieweg&Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig - Wiesbaden.
- [31] TROPFKE, J. (1923): Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 5: Ebene Trigonometrie und Sphärik und Sphärische Trigonometrie, de Gruyter-Verlag, Berlin-Leipzig.

- [32] WAGNER K. (1949): Kartographische Netzentwürfe, Bibliographisches Institut Leipzig.

#### LITERATURVERZEICHNIS ZUM ANHANG

- [1] RICKEY F., TUCHINSKY P.M. ( 1980 ): „An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant”, in: „Mathematics Magazine 53”, Nr. 1, Seite 162 - 165.

#### INTERNETADRESSEN

[www.informatik.uni-leipzig.de/~sosna/karten/refell.html](http://www.informatik.uni-leipzig.de/~sosna/karten/refell.html)

[www.informatik.uni-leipzig.de/~sosna/karten/erde.html](http://www.informatik.uni-leipzig.de/~sosna/karten/erde.html)

[www.oneclick.de/pigeo/verzeichnis.html](http://www.oneclick.de/pigeo/verzeichnis.html)

<http://www.geo-net.org>

<http://www.zgis.at>

<http://ourworld.computerserve.com/homepages/Tfriebe/diplom/html/kap2.htm>

<http://www.geo-net.org>

<http://www.zgis.at>

<http://www.gw.eduhi.at>

<http://www.indo.com/distance/>

<http://www.getty.edu/research/tools/vocabulary/tgn/index.html>

<http://www.pirabel.de/zitate.htm>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/lebensdaten.html>

<http://www.swan.ac.uk/classics/staff/ter/grst/People>

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung Titelblatt [ 32 ], Seite 226

Abb. 1.	[ 8 ], Seite 2	Abb. 25	[ 6 ], Seite 24
Abb. 2.	[ 8 ], Seite 14	Abb. 26	[ 27 ], Seite 284
Abb. 3.	[ 8 ], Seite 15	Abb. 27	[ 12 ], Seite 30
Abb. 4.	[ 8 ], Seite 43	Abb. 28	[ 12 ], Seite 35
Abb. 5.	[ 17 ], Seite 93	Abb. 28	[ 27 ], Seite 361
Abb. 6.	[ 16 ], Seite 133	Abb. 29	[ 6 ], Seite 86
Abb. 7.	[ 11 ], Seite 128/129	Abb. 30	[ 6 ], Seite 87
Abb. 8.	[ 8 ], Seite 126	Abb. 31	[ 19 ], Seite 63
Abb. 9.	[ 17 ], Seite 128 (verändert)	Abb. 32	[ 25 ], Seite
Abb. 10	[ 17 ], Seite 128	Abb. 33	[ 24 ], Seite 167
Abb. 11	[ 17 ], Seite 128	Abb. 34	[ 12 ], Seite 46
Abb. 12	[ 17 ], Seite 128	Abb. 35	[ 12 ], Seite 54 (verändert)
Abb. 13	[ 17 ], Seite 189 (verändert)	Abb. 36	[ 32 ], Seite 34
Abb. 14.	[ 8 ], Seite 203	Abb. 37	[ 32 ], Seite 35
Abb. 15.	[ 15 ], Seite 44	Abb. 38	[ 32 ], Seite 40
Abb. 16.	[ 27 ], Seite 224	Abb. 41	[ 32 ], Seite 80
Abb. 17	[ 15 ], Seite 47 (verändert)	Abb. 43	Der neue KOZENN- Atlas, Seite 135
Abb. 18.	[ 27 ], Seite 227 (verändert)	Abb. 44	[ 26 ], Seite 25
Abb. 19	[ 9 ], Seite 16 (verändert)	Abb. 45	[ 32 ], Seite 169
Abb. 20	[ 6 ], Seite 16	Abb. 46	[ 32 ], Seite 97
Abb. 21	[ 14 ], Seite 92	Abb. 47	[ 26 ], Seite 142
Abb. 22	[ 6 ], Seite 20 (verändert)	Abb. 48	[ 26 ], Seite 144
Abb. 23	[ 6 ], Seite 21	Abb. 49	[ 32 ], Seite 174
Abb. 24	[ 6 ], Seite 23	Abb. 50	[ 32 ], Seite 226

ABBILDUNGSVERZEICHNIS ZUM ANHANG

Abbildung 1 [ 1 ], Seite 163, verändert