

Sphärische Trigonometrie

Verfasserin: Barbara Zehetmaier

Klasse: 8C Schuljahr: 2014/15

Betreuungslehrer: Mag. Harald Grötz

Abgabedatum: 9. Februar 2015

Abstract

Diese vorwissenschaftliche Arbeit beschäftigt sich mit der Sphärischen Trigonometrie und deren Anwendung in der Astronomie. Neben den Formeln für ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck, dem sphärischen Sinussatz, dem Seitencosinussatz und dem Winkelcosinussatz wird auch die Formel für den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks hergeleitet. Ein Abschnitt beschäftigt sich mit Kugelzweiecken, wobei auch hier die Flächeninhaltsformel hergeleitet wird, und mit Klein- und Großkreisen, mit denen die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf einer Kugel verbunden ist. Der erste Teil der VWA widmet sich den mathematischen Überlegungen, während sich der zweite Teil mit einem Ausschnitt der sphärischen Astronomie beschäftigt. Dabei wird auf Begriffe der Astronomie, auf das Horizontsystem, das Äquatorsystem und deren Zusammenhänge, sowie auf die ungefähre Berechnung der Tageslänge eingegangen. Für Berechnungen in der sphärischen Astronomie werden die Formeln für sphärische Dreiecke, die im ersten Abschnitt hergeleitet werden, angewandt. Alle Überlegungen werden meist mit Abbildungen anschaulich dargestellt, sowie auch die Theorie in Beispielen erläutert wird. Die Arbeit ist eine Literaturarbeit mit Beispielen zu bestimmten Formeln, die selbst erstellt oder zumindest selbst erarbeitet wurden.

Vorwort

Die vorwissenschaftliche Arbeit gibt uns Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, sich mit einem Fachthema zu befassen, das uns interessiert und Spaß macht. Daher habe ich das mathematische Thema „Sphärische Trigonometrie“ gewählt, das mich schon seit einiger Zeit beschäftigt hat. Bei diesem Thema geht es neben der Erarbeitung und Herleitung von Formeln auch um deren Anwendungen. Ich habe mich bei den Anwendungen besonders auf die Astronomie bezogen, weshalb sich ein Teil meiner vorwissenschaftlichen Arbeit mit Begriffen und Koordinatensystemen aus der Astronomie beschäftigt.

Ich bin der Meinung, dass die Trigonometrie auf der Kugel eine große Bedeutung für uns Menschen hat, da wir auf der Erde – die annäherungsweise eine Sphäre ist – leben und da auch der Himmel für Berechnungen als Sphäre gedacht wird. Ebenfalls ist es interessant zu sehen, welche Unterschiede und Parallelen es zwischen der ebenen und sphärischen Trigonometrie gibt.

Das Arbeiten an der VWA war zum Teil herausfordernd und hat auch viel Zeit in Anspruch genommen, doch ich hatte eine sehr gute Unterstützung. An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei meinem Betreuungslehrer Mag. Harald Grötz bedanken. Sie waren immer bereit offene Fragen zu beantworten und gaben mir eine Menge hilfreicher Tipps. Danke.

Viendorf, im Februar 2015

Barbara Zehetmaier

Inhaltsverzeichnis

Abstract	2
Vorwort	3
Inhaltsverzeichnis	4
Einleitung	6
1. Kreise auf Sphären	7
1.1. Großkreise	7
1.2. Kleinkreise	7
1.3. Gegenpunkte	8
1.4. Sphärischer Abstand	9
2. Das Kugelzweieck	10
3. Das Kugeldreieck	11
3.1. Seiten, Winkel und Eulersche Dreiecke	11
3.2. Nebendreiecke	12
3.3. Gegendreieck	12
3.4. Polardreieck	13
3.5. Flächeninhalt	14
3.6. Rechtwinkelige Kugeldreiecke	15
3.6.1. Das Dreikant	15
3.6.2. Die Grundformeln.....	15
3.6.3. Die Regel von Neper	17
3.7. Allgemeine Kugeldreiecke	19
3.7.1. Der Sinussatz	19
3.7.2. Der Seitencosinussatz.....	20
3.7.3. Der Winkelcosinussatz	21
3.8. Die Sätze von Legendre und Soldner	23
4. Sphärische Astronomie	25
4.1. Einführung	25
4.2. Begriffserklärungen	26
4.3. Das Horizontsystem	27
4.4. Das Äquatorsystem	30
4.5. Das nautische Dreieck	31
4.6. Weitere Zusammenhänge zwischen Horizontkoordinaten und Äquatorkoordinaten	32

4.7. Auf- und Untergangszeiten der Sonne	33
5. Formelsammlung	35
6. Schluss	37
6.1. Zusammenfassung.....	37
6.2. Schlusswort	37
7. Quellenverzeichnis.....	38
7.1. Literaturverzeichnis	38
7.2. Internetquellen	38
8. Abbildungsverzeichnis	39
Selbstständigkeitserklärung.....	42

Einleitung

Schon vor 4000 Jahren beschäftigten sich die Menschen mit der Trigonometrie auf Sphären. Dabei war die Entwicklung dieses Bereiches immer eng mit der Astronomie verbunden und findet dort auch noch heute Anwendung. Schon damals war bekannt, dass in sphärischen Dreiecken, also Dreiecken auf einer Kugel, die bekannten Formeln aus der Ebene nicht angewendet werden dürfen.

Die Arbeit beschäftigt sich mit Kugelzweiecken, Kugeldreiecken und Koordinatensystemen in der Astronomie. Es werden sowohl Formeln für das rechtwinkelige Kugeldreieck als auch für allgemeine Kugeldreiecke hergeleitet. Diese Formeln finden in der sphärischen Astronomie im nautischen Dreieck Anwendung. Zu Beginn jedoch gibt es einen Überblick über Kreise auf Sphären, der den Einstieg in das Thema bildet. Einige Kapitel verlangen das Wissen der vorhergehenden Abschnitte und bauen somit aufeinander auf. In der Arbeit werden nicht nur die Herleitungen der Flächeninhaltsformel, des Sinussatzes, des Seitencosinussatzes und des Winkelcosinussatzes dargelegt, sondern die Formeln werden auch in Beispielen angewandt. Die Beispiele sind zum Teil selbst überlegt und selbstständig ausgearbeitet. Am Schluss der Arbeit wird auf das Horizontal- und Äquatorsystem, auf die Auf- und Untergangszeiten der Sonne und auf einige Begriffe aus der sphärischen Astronomie eingegangen. Dazu wird auch das nautische Dreieck und somit der Bezug zur sphärischen Trigonometrie beschrieben. Das letzte Kapitel enthält eine Formelsammlung aller in der Arbeit hergeleiteten Formeln.

Mit diesen Themen haben sich auch Hans Kern und Josef Rung befasst. In ihrem im Jahr 1997 erschienenen Buch erklären sie die sphärische Trigonometrie grundlegend und anschaulich. Ein weiteres Buch, das als Literatur in der Arbeit dient, ist von Rudolf Hame im Jahr 1995 erschienen. Auch er beschreibt Schritt für Schritt die sphärische Trigonometrie und in Folge daraus die Anwendung in der Astronomie und Kartographie. Das Hauptziel dieser vorwissenschaftlichen Arbeit ist es, eine Einführung in die sphärische Trigonometrie zu geben und auch einige Anwendungen kennen zu lernen. In der Arbeit wird insbesondere auf einige Anwendungen in der Astronomie eingegangen, nicht jedoch auf die Kartographie, die einen weiteren großen Anwendungsbereich darstellt.

1. Kreise auf Sphären

1.1. Großkreise

Wird eine Kugel durch den Mittelpunkt M mit einer Ebene geschnitten, so entsteht ein Kreis, dessen Radius gleich dem der Kugel ist und der als Mittelpunkt den Kugelmittelpunkt M hat. Ein derartiger Kreis wird als Großkreis bezeichnet. (vgl. Hame, 1995: 12-13)

Als Meridiane bezeichnet man alle Großkreise m, die den Großkreis k senkrecht schneiden. Es gibt unendlich viele Meridiane zu einem Großkreis (Abbildung 1). (vgl. Kern, 1997: 18)

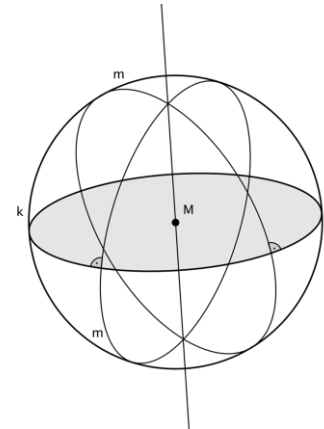


Abbildung 1: Großkreise

1.2. Kleinkreise

Schneidet man eine Kugel mit einer Ebene, die nicht den Kugelmittelpunkt M enthält und deren Abstand vom Kugelmittelpunkt M kleiner als der Kugelradius R ist, so entsteht ein Kreis, dessen Radius r kleiner als der Kugelradius R ist. Dieser Kreis wird als Kleinkreis bezeichnet. (vgl. Hame, 1995: 13)

Berechnung des Kleinkreisradius r (Abbildung 2):

a.....Abstand vom Kugelmittelpunkt M zum

Kleinkreismittelpunkt M'

R.....Kugelradius

r.....Radius des Kleinkreises

P.....Alle Punkte der Schnittmenge

$$\overline{MM'} \perp \overline{M'P}$$

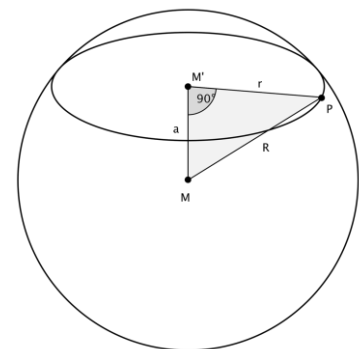


Abbildung 2: Berechnung des Kleinkreisradius

$$R^2 = a^2 + r^2$$

$$r = \sqrt{R^2 - a^2}$$

Auf der Erde sind alle Breitenkreise bis auf den Äquator Kleinkreise. Der Äquator ist ein Großkreis und die Längengrade (Meridiane) sind Großkreishälften. (vgl. Hame, 1995: 13)

Berechnung des Umfangs eines Breitenkreises (Abbildung 3):
 Da α gleich β ist, kann man im rechtwinkligen Dreieck den Cosinus ansetzen und so den Radius des Kleinkreises berechnen, welcher wiederum in die Kreisumfangsformel eingesetzt wird.

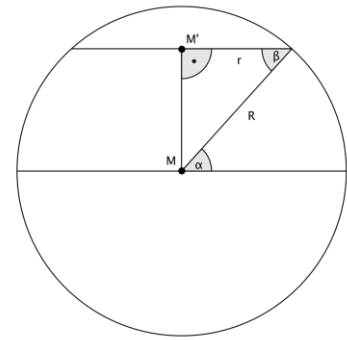


Abbildung 3: Berechnung des Umfangs eines Breitenkreises

$$\cos \alpha = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cdot \cos \alpha$$

$$U = 2\pi r$$

$$U = 2\pi R \cdot \cos \alpha$$

(vgl. Hame, 1995: 10-11)

Beispiel:

Berechne die Länge des Breitenkreises, der durch Hollabrunn (N49°) verläuft ($R = 6370$ km), den Abstand von Hollabrunn zur Erdachse, sowie die Bahngeschwindigkeit bei der Drehung um die Erdachse!

Länge des Breitenkreises:

$$U = 2\pi R \cdot \cos \alpha$$

$$U = 2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot \cos 49^\circ$$

$$U = 26258,0 \dots \approx 26300 \text{ km}$$

Abstand Hollabrunn – Erdachse:

$$r = R \cdot \cos \alpha$$

$$r = 4179,096 \dots \approx 4180 \text{ km}$$

Bahngeschwindigkeit ($T=24$ h):

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v = 1094,084 \dots \approx 1090 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1.3. Gegenpunkte

Gegenpunkte sind jene zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke den Kugelmittelpunkt enthält, sie sind also Endpunkte des Kugeldurchmessers. Schneiden sich zwei Großkreise, die nicht zusammenfallen, so sind die entstandenen Schnittpunkte Gegenpunkte. (vgl. Hame, 1995: 14) Der Gegenpunkt von Hollabrunn (49°N 16°O) hat die geographischen Koordinaten 49°S 164°W und liegt im Südpazifischen Ozean. Das nächstgelegene Festland des

Gegenpunktes und somit auch das am weitesten entfernte Festland von Hollabrunn sind die Chatham-Inseln, die zu Neuseeland gehören.

1.4. Sphärischer Abstand

Geodäten sind jene Bahnen, auf denen sich das Licht und Teilchen ohne Einwirkungen von außen bewegen würden. Eine Geodäte ist also der kürzeste Abstand zweier Punkte. (vgl. spektrum.de)

Auf der Kugeloberfläche haben zwei Punkte die kürzeste Verbindung, wenn man sie mit dem kürzeren Bogen des Großkreises, der durch beide Punkte verläuft, verbindet. So ist jeder Großkreis eine geodätische Linie, wie auch Geraden in der Ebene. (vgl. Steinert, 1977: 30) Wie in Abbildung 4 legt man einen Großkreis durch die Punkte A und B, dazu legt man einen Kleinkreis durch A und B. Jeder der beiden Kreise

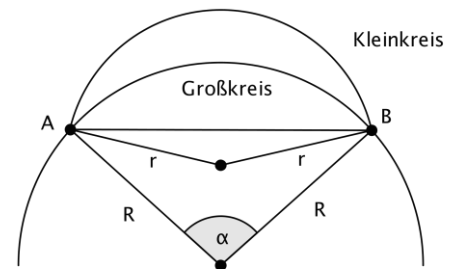


Abbildung 4: Sphärischer Abstand

hat einen Kreisbogen über die Sehne AB. Da der Kreisbogen mit dem größeren Radius über der Sehne AB kürzer ist und der Großkreis einen größeren Radius als der Kleinkreis hat, bildet er die kürzeste Verbindung. Diese geodätische Linie wird als sphärischer Abstand bezeichnet. Die Länge dieses Bogens wird durch den Mittelpunktswinkel α festgelegt. (vgl. Kern, 1997: 16)

$$S_{\widehat{AB}} = R \cdot \alpha \quad (\alpha \text{ im Bogenmaß}) \quad (\text{vgl. Kern, 1997: 16})$$

$$S_{\widehat{AB}} = \pi \cdot R \cdot \frac{\alpha}{180} \quad (\alpha \text{ im Winkelmaß}) \quad (\text{vgl. Kern, 1997: 14})$$

2 Beispiele zur Kugelgestalt der Erde:

1. Wie groß muss der Winkel α beim Erdmittelpunkt sein, damit der direkte Abstand (d) durch die Erdkugel 1% kleiner als der sphärische Abstand (s) ist (Abbildung 5)?

$$s = \frac{\pi r \alpha}{180}$$

$$d = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos \alpha} \quad (\text{Cosinussatz im Dreieck } \triangle AMB)$$

$$100\% = s$$

$$100 \cdot d = 99 \cdot s$$

$$99\% = d$$

$$100 \cdot \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos \alpha} = 99 \cdot \frac{\pi r \alpha}{180}$$

$$\sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos \alpha} = 11 \cdot \frac{\pi r \alpha}{2000}$$

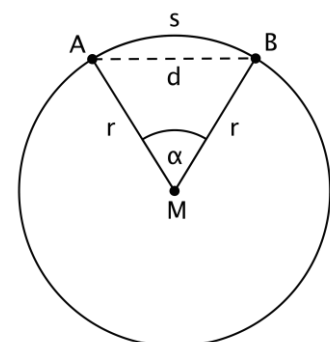


Abbildung 5: Vergleich sphärischer und direkter Abstand

$$2r^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = \alpha^2 \cdot \frac{121\pi^2 r^2}{2000^2}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = \frac{121\pi^2}{200^3}$$

Diese Gleichung ist analytisch nicht lösbar. Jedoch kann man durch Ausprobieren (siehe Abbildung 6) zu einem ungefähren Ergebnis gelangen. Dabei stellt man fest, dass bei $\alpha=28^\circ$ der direkte Weg ungefähr 99% vom sphärischen Abstand ausmacht und somit bei Winkeln über 28° ein größerer Fehler als 1% bei

α (in Grad)	$\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2}$	$\frac{121\pi^2}{200^3}$	$\left(\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} - \frac{121\pi^2}{200^3}\right)^2$
...
24	0,000150094692	0,000149277767	0,000000000000667366
25	0,000149907541	0,000149277767	0,000000000000396616
26	0,000149712949	0,000149277767	0,000000000000189384
27	0,000149510941	0,000149277767	0,000000000000054370
28	0,000149301540	0,000149277767	0,00000000000000565
29	0,000149084772	0,000149277767	0,000000000000037247
30	0,000148860662	0,000149277767	0,000000000000173976
31	0,000148629240	0,000149277767	0,0000000000000420587
32	0,000148390531	0,000149277767	0,0000000000000787187
...

Abbildung 6: Tabelle

Vernachlässigung der Kugelgestalt der Erde begangen wird.

2. Wie hoch ist die Wölbung des Attersees (Längsausdehnung ca. $0,15^\circ$) auf Grund der Kugelgestalt der Erde ($r = 6370$ km) (siehe Abbildung 7)?

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{r}$$

$$d = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$d = 6369,99 \dots \text{ km}$$

$$h = r - d = 0,0054 \dots \text{ km} \approx 5 \text{ m}$$

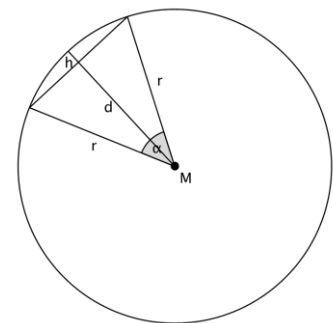


Abbildung 7: Wölbung des Attersees

2. Das Kugelzweieck

Kugelzweiecke entstehen, wenn man zwei Gegenpunkte A und A' durch zwei verschiedene Großkreisbögen verbindet (Abbildung 8). Dabei bezeichnet man A und A' als die Ecken der entstandenen Kugelzweiecke. Die Großkreisbögen von A nach A' sind die Seiten der Kugelzweiecke. Sie bilden halbe Bögen eines Großkreises und sind immer gleich groß, da alle

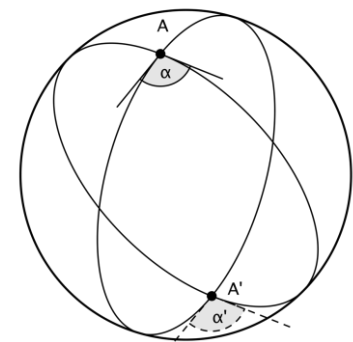


Abbildung 8: Kugelzweieck

Großkreise auf einer Kugel immer den Umfang $2\pi r$ haben. Der Winkel, den die Halbtangenten an die Großkreisbögen in den Eckpunkten einschließen, ist der Winkel des Kugelzweiecks. Mit anderen Worten ist es jener Winkel, der durch die beiden Großkreisebenen eingeschlossen wird. Die beiden Winkel α und α' sind immer gleich groß. Da durch zwei Großkreisbögen zwei Kugelzweiecke entstehen, wird festgelegt, dass immer vom kleineren Zweieck ausgegangen wird, also jenes mit dem Winkel $\alpha \leq 180^\circ$. (vgl. Hame, 1995: 30)

Der Flächeninhalt einer Kugel lässt sich mit $A_K = 4\pi r^2$ berechnen. Da sich der Winkel α des Kugelzweiecks zum Vollwinkel gleich wie der Flächeninhalt des Kugelzweiecks zum Flächeninhalt der Kugel verhält, kann durch Umformen der Flächeninhalt des Kugelzweiecks berechnet werden.

$$A_Z : A_K = \alpha : 360^\circ$$

$$A_Z = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi r^2 \quad (\alpha \text{ im Winkelmaß})$$

$$A_Z = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 2\alpha r^2 \quad (\alpha \text{ im Bogenmaß})$$

(vgl. Kern, 1997: 14)

3. Das Kugeldreieck

3.1. Seiten, Winkel und Eulersche Dreiecke

Werden drei voneinander verschiedene Punkte, die sich nicht auf derselben Großkreisebene befinden, mit Großkreisbögen verbunden, so entsteht ein Kugeldreieck ABC (Abbildung 9). A, B und C sind die Ecken des Dreiecks und dessen Seiten sind die Großkreisbögen zwischen den Eckpunkten. Da die Länge der Großkreisbögen wegen der Abhängigkeit vom Kugelradius ungeeignet ist, wird die Größe einer Seite mit dem zugehörigen Mittelpunktswinkel des Großkreisbogens angegeben. Laut dieser

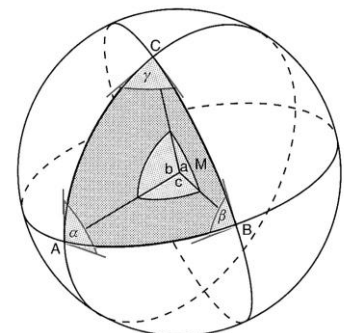


Abbildung 9: Kugeldreieck (Hame, 1995: 33)

Definition ist die Seite c der Winkel AMB. Für ein Kugeldreieck gilt, dass die Summe der drei Seiten kleiner als 360° aber größer als 0° ist. (vgl. Hame, 1995: 33,37)

Die Winkel eines Kugeldreiecks sind definiert als die Winkel, die die Halbtangenten in den Eckpunkten miteinander einschließen. Das sind also jene Winkel, welche die Großkreisebenen miteinander einschließen. (vgl. Hame, 1995: 33) Die Summe der Winkel im

Kugeldreieck ist größer als 180° . Dies wird später bei der Herleitung des Flächeninhaltes eines sphärischen Dreiecks gezeigt. Subtrahiert man von der Summe der Winkel 180° , so erhält man den sphärischen Exzess ϵ . (vgl. Kern, 1997: 23)

Bei Kugeldreiecken kann man nicht wie in der ebenen Geometrie so leicht unterscheiden was Innen und Außen ist, da durch einen Bogenzug zwei Dreiecke entstehen und da man zwei Punkte jeweils durch zwei verschiedene Bogenzüge verbinden kann. Folglich lassen sich die Eckpunkte durch 8 verschiedene Bogenzüge verbinden. Daher ergeben sich durch drei Punkte A, B und C 16 Kugeldreiecke.

Zur eindeutigen Bestimmung wird nur noch jenes Kugeldreieck betrachtet, dessen Seiten jeweils kleiner als 180° sind und dessen Winkel jeweils kleiner als 180° sind. Derartige Kugeldreiecke werden Eulersche Dreiecke bezeichnet. (vgl. Hame, 1995: 33-34)

3.2. Nebendreiecke

Ein Dreieck, das ein Kugeldreieck auf ein Kugelzweieck ergänzt, wird als Nebendreieck bezeichnet. Zu jedem Dreieck ABC gibt es drei Nebendreiecke $AC'B$, $BA'C$ und ACB' (Abbildung 10).

Nebendreiecke haben also jeweils eine Seite mit dem Dreieck gemeinsam und auch der Gegenwinkel dieser Seite stimmt überein. Da ein Dreieck und sein Nebendreieck ein Kugelzweieck ergibt, ergänzen sich auch die Winkel, die der gemeinsamen Seite anliegen, jeweils auf 180° . Ebenso ergänzen sich die Seiten, die der gemeinsamen Seite anliegen, auf 180° . (vgl. Hame, 1995: 44)

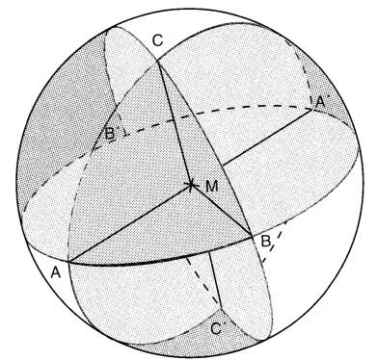


Abbildung 10: Nebendreiecke (Hame, 1995: 44)

3.3. Gegendreieck

Bildet man aus den Gegenpunkten der Punkte des Kugeldreiecks ABC ein Dreieck, so wird dieses als Gegendreieck $A'B'C'$ bezeichnet.

Die drei Seiten des Gegendreiecks $A'B'C'$ sind gleich groß wie die Seiten des Dreiecks ABC. Auch deren Winkel sind gleich groß. Die jeweiligen Winkel des Dreiecks ABC werden durch die gleichen Ebenen wie die entsprechenden Winkel beim Gegendreieck eingeschlossen. (vgl. Hame, 1995: 45)

3.4. Polardreieck

Ein Pol eines Großkreises ist jener Punkt, den man erhält, wenn man die Normale auf die Großkreisebene durch den Mittelpunkt mit der Kugel schneidet. (vgl. Hame, 1995: 45)

Auf zwei Ebenen E_1 und E_2 wird jeweils eine auf die Ebene normalstehende Gerade durch den Punkt S , der sich nicht auf den beiden Ebenen befindet, gelegt (Abbildung 11). Der Keilwinkel φ zwischen den zwei Ebenen ergänzt sich mit dem Winkel zwischen den zwei Loten auf 180° . Dies gilt auch, wenn sich der Punkt S auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen befindet und die Normalen auf die Ebenen durch den Punkt gelegt werden (Abbildung 12).

Anstatt der zwei Ebenen kann man auch zwei Großkreisebenen verwenden, wodurch ein Kugelzweieck mit dem Winkel φ , dem Keilwinkel, entsteht.

Anschließend zeichnet man die beiden Pole des orientierten Kugelzweiecks ein, wie auch zuvor die Lote zu den zwei Ebenen eingezeichnet wurden.

Auch bei einem Kugeldreieck ABC kann man die drei Pole $C' A' B'$ zu den drei orientierten Großkreisbögen einzeichnen. A', B' und C' bilden ein Dreieck, das Polardreieck bezeichnet wird (Abbildung 13). Wie schon oben mit den beiden Ebenen gezeigt, ergänzen sich die Seiten des Polardreiecks a', b' und c' mit den entsprechenden Winkeln α, β und γ jeweils auf 180° und auch umgekehrt ergänzen sich die Winkel α', β' und γ' mit den entsprechenden Seiten a, b und c des Kugeldreiecks auf 180° . Würde man zum Polardreieck das Polardreieck einzeichnen, so würde man wieder das Ausgangsdreieck ABC erhalten. (vgl. Kern, 1997: 28-29)

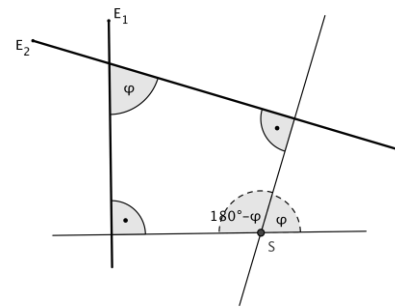


Abbildung 11: Ebenen mit jeweiligen Normalen durch den Punkt S

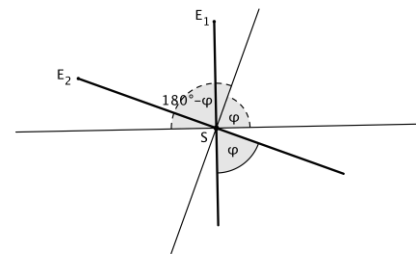


Abbildung 12: Ebenen mit jeweiligen Normalen durch den Punkt S , der auf der Schnittgeraden liegt

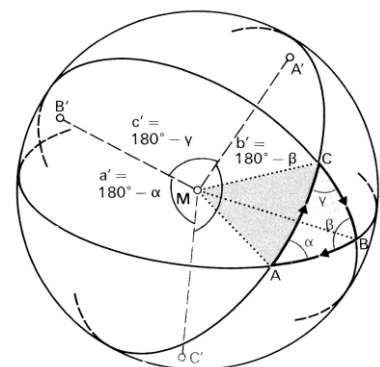


Abbildung 13: Polardreieck (vgl. Kern, 1997: 29)

3.5. Flächeninhalt

Die folgenden Überlegungen zur Herleitung des Flächeninhalts eines Kugeldreiecks werden anhand des Dreiecks ABC aus Abbildung 14 gemacht. Dabei steht die Abkürzung Z jeweils für die entsprechenden Kugelzweiecke.

$$\begin{aligned} \Delta ABC \cup \Delta BC\bar{A} &= Z_{AA} \\ \Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \Delta \bar{B}\bar{C}A &= Z_{\bar{A}\bar{A}} = \bar{Z}_{AA} \\ \Delta ABC \cup \Delta A\bar{B}\bar{C} &= Z_{BB} \\ \Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \Delta \bar{A}\bar{B}C &= Z_{\bar{B}\bar{B}} = \bar{Z}_{BB} \\ \Delta ABC \cup \Delta AB\bar{C} &= Z_{CC} \\ \Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \Delta \bar{A}B\bar{C} &= Z_{\bar{C}\bar{C}} = \bar{Z}_{CC} \end{aligned}$$

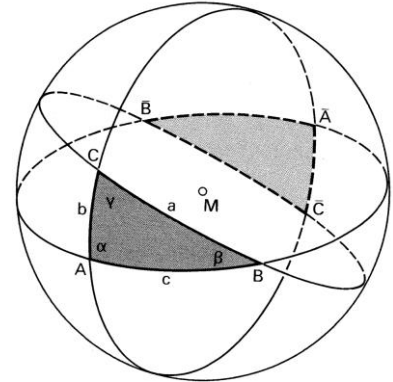


Abbildung 14: Flächeninhalt eines Kugeldreiecks (vgl. Kern, 1997: 22)

Die gegenüberliegenden Kugelzweiecke Z und \bar{Z} haben den gleichen Flächeninhalt. Addiert man die sechs Kugelzweiecke, so erhält man einen Flächeninhalt, der um das Zweifache des Flächeninhalts des Dreiecks ΔABC und um das Zweifache des Dreiecks $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ größer ist, als der Flächeninhalt der Kugel. Da Gegendreiecke einen gleich großen Flächeninhalt haben, können die Dreiecke zu viermal dem Dreieck ΔABC zusammengefasst werden. Daraus ergibt sich:

$$A_K = 2 \cdot (A_{Z_{AA}} + A_{Z_{BB}} + A_{Z_{CC}}) - 4A_{\Delta ABC}$$

Setzt man nun für A_Z die schon hergeleitete Flächeninhaltsformel

$A_Z = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi r^2$ und für A_K die Flächeninhaltsformel der Kugel ein, so erhält man:

$$4\pi r^2 = 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi r^2 + \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 4\pi r^2 + \frac{\gamma}{360^\circ} \cdot 4\pi r^2 \right) - 4A_{\Delta ABC}$$

$$4\pi r^2 = 8\pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360^\circ} - 4A_{\Delta ABC}$$

$$A_{\Delta ABC} = 2\pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360^\circ} - \pi r^2$$

$$A_{\Delta ABC} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ}{180^\circ} \text{ bzw. } A_{\Delta ABC} = \pi r^2 \cdot \frac{\varepsilon}{180^\circ}$$

Wie schon bekannt kann man anstatt $\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ auch ε für den sphärischen Exzess schreiben. Aus der Formel für den Flächeninhalt ergibt sich, dass die Summe der Innenwinkel größer als 180° sein muss, da der Flächeninhalt größer als Null sein muss. (vgl. Kern, 1997: 22-23)

Ebenso lässt sich aus der Formel der sphärische Exzess ε deuten: Je kleiner ein Dreieck im Vergleich zur Kugel ist, also je kleiner sein Flächeninhalt im Vergleich zur Kugeloberfläche ist,

umso kleiner ist ε und umso mehr nähert sich die Geometrie auf der Kugel der Geometrie der Ebene an, in welcher gilt, dass die Winkelsumme in einem Dreieck 180° entspricht.

3.6. Rechtwinkelige Kugeldreiecke

3.6.1. Das Dreikant

Ein Dreikant entsteht, wenn vom Mittelpunkt einer Kugel Strahlen durch die drei Eckpunkte eines Kugeldreiecks gelegt werden, dabei wird von jeweils zwei Strahlen eine Ebene gebildet, welche geschnitten mit der Kugel ein Dreikant ergeben. (vgl. Schaumüller, 2010: 21-22) Die Winkel zwischen den Strahlen sind die Seiten des Kugeldreiecks und die Winkel zwischen den Ebenen sind die Winkel des sphärischen Dreiecks. (vgl. Kern, 1997: 27) Ein Dreikant wird auch als Kugeldreiseit oder dreiseitige Ecke bezeichnet. (vgl. Schaumüller, 2010: 21-22)

3.6.2. Die Grundformeln

Zur Herleitung der Grundformeln eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks wird ein Dreikant eines Kugeldreiecks mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ betrachtet. Dabei befindet sich der rechte Winkel beim Eckpunkt C , also $\gamma=90^\circ$. In der Abbildung 15 gibt es insgesamt 4 rechtwinkelige ebene Dreiecke, nämlich $\triangle PQR$ mit rechtem Winkel bei Q , $\triangle MPQ$ mit rechtem Winkel bei Q , $\triangle QRM$ mit rechtem Winkel bei R und $\triangle MPR$ mit rechtem Winkel bei R . Die schon aus der

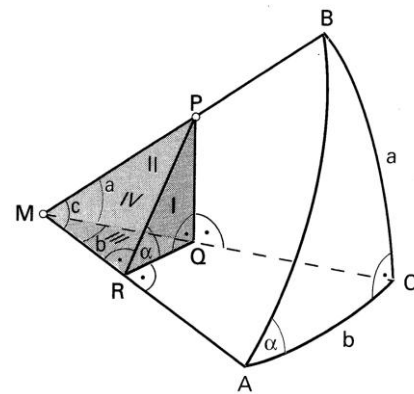


Abbildung 15: Dreikant (Kern, 1997: 32)

ebenen Trigonometrie bekannten Formeln $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ und $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ werden nun in den rechtwinkligen Dreiecken angewandt.

Betrachtet man die Dreiecke $\triangle MPQ$ mit rechtem Winkel bei Q und $\triangle MPR$ mit rechtem Winkel bei R (Abbildung 15), so ergibt sich der Sinus für ein rechtwinkliges Kugeldreieck:

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{\overline{PQ}}{\overline{PM}} \Rightarrow \overline{PM} = \frac{\overline{PQ}}{\sin a} \\ \sin c &= \frac{\overline{PR}}{\overline{PM}} \Rightarrow \overline{PM} = \frac{\overline{PR}}{\sin c} \\ \frac{\overline{PQ}}{\sin a} &= \frac{\overline{PR}}{\sin c} \\ \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} &= \frac{\sin a}{\sin c} = \sin \alpha \end{aligned}$$

Betrachtet man die Dreiecke $\triangle QRM$ und $\triangle MPR$ mit rechtem Winkel jeweils bei R (Abbildung 15), so ergibt sich der Cosinus für ein rechtwinkeliges Kugeldreieck:

$$\begin{aligned}\tan b &= \frac{\overline{QR}}{\overline{MR}} \Rightarrow \overline{MR} = \frac{\overline{QR}}{\tan b} \\ \tan c &= \frac{\overline{PR}}{\overline{MR}} \Rightarrow \overline{MR} = \frac{\overline{PR}}{\tan c} \\ \frac{\overline{QR}}{\tan b} &= \frac{\overline{PR}}{\tan c} \\ \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} &= \frac{\tan b}{\tan c} = \cos \alpha\end{aligned}$$

Betrachtet man die Dreiecke $\triangle MPQ$ mit rechtem Winkel bei Q und $\triangle QRM$ mit rechtem Winkel bei R (Abbildung 15), so ergibt sich der Tangens für ein rechtwinkeliges Kugeldreieck:

$$\begin{aligned}\tan a &= \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}} \Rightarrow \overline{MQ} = \frac{\overline{PQ}}{\tan a} \\ \sin b &= \frac{\overline{QR}}{\overline{MQ}} \Rightarrow \overline{MQ} = \frac{\overline{QR}}{\sin b} \\ \frac{\overline{PQ}}{\tan a} &= \frac{\overline{QR}}{\sin b} \\ \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} &= \frac{\tan a}{\sin b} = \tan \alpha\end{aligned}$$

(vgl. Kern, 1997: 32-33)

In einem sphärischen Dreieck darf der Satz des Pythagoras nicht angewandt werden, jedoch gibt es einen Zusammenhang der drei Seiten, der ähnlich dem Satz des Pythagoras in der Ebene ist. (vgl. Schaumüller, 2010: 32) Aus den ebenen Dreiecken $\triangle MPR$ mit rechtem Winkel bei R und $\triangle MPQ$ mit rechtem Winkel bei Q (Abbildung 15) erhält man folgendes:

$$\begin{aligned}\triangle MPR: \quad \cos c &= \frac{\overline{MR}}{\overline{MP}} \Rightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{MR}}{\cos c} \\ \triangle MPQ: \quad \cos a &= \frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}} \Rightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{MQ}}{\cos a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{MR}}{\cos c} &= \frac{\overline{MQ}}{\cos a} \\ \frac{\overline{MR}}{\overline{MQ}} &= \frac{\cos c}{\cos a} = \cos b\end{aligned}$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

In Worten bedeutet dies: Der Cosinus der „Hypotenuse“ ist gleich dem Produkt der Cosinus der beiden „Katheten“.

(vgl. Kern, 1997: 32-33)

3.6.3. Die Regel von Neper

Die Neper'sche Regel ermöglicht es, die Formeln für ein rechtwinkeliges Kugeldreieck darzustellen und einfach abzuleiten. Dabei werden die Seiten und die Winkel der Reihe nach an einem Kreisumfang angeordnet, wobei man den rechten Winkel auslässt und die Katheten durch die Komplemente ersetzt (Abbildung 16). (vgl. Sigl, 1969: 283-284)

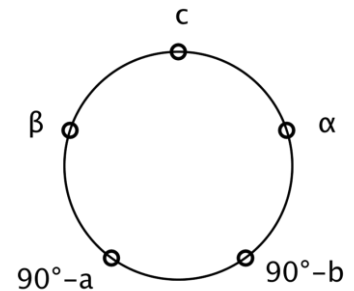


Abbildung 16: Neper'scher Kreis

„Der Cosinus eines Stückes am Neper'schen Kreis ist gleich dem Produkt der Cotangens der anliegenden Stücke oder dem Produkt der Sinus der gegenüberliegenden Stücke.“ (Kern, 1997: 34) Mit Hilfe des Modells lassen sich die schon hergeleiteten Formeln für ein rechtwinkeliges Kugeldreieck sowie 6 weitere Formeln darstellen.

Beispiel:

Da $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ist, ergibt sich folgendes:

$$\cos(90^\circ - a) = \sin \alpha \cdot \sin c$$

$$\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$$

-> siehe Grundformeln

(vgl. Kern, 1997: 34)

Zwei Beispiele zu rechtwinkelligen Kugeldreiecken auf der Erde:

1. Beispiel:

Der Georgsee in Uganda liegt direkt auf dem Äquator und hat ca. 30° östliche Länge. Wie weit ist dieser See von Hollabrunn (49°N 16°O) entfernt? Die Erde wird dazu als eine Kugel mit dem Radius $r = 6370$ km betrachtet (siehe Abbildung 17).

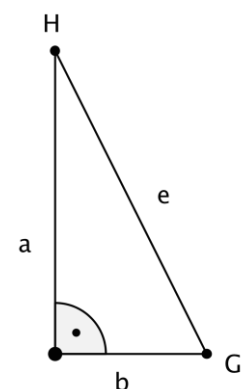


Abbildung 17: Ebene Darstellung des Kugeldreiecks

e..... Entfernung Hollabunn – Georgsee (in Grad)

x..... Entfernung Hollabunn – Georgsee (in km)

$a = 49^\circ$ (geographische Breite von Hollabrunn)

$b = 30^\circ - 16^\circ = 14^\circ$ (Differenz der geographischen Längen)

$\cos e = \cos a \cdot \cos b$ („Pythagoras“ in Kugeldreiecken)

$e = \arccos 0,63657 \dots = 50,4633 \dots^\circ \approx 50^\circ$

$x = \frac{e \cdot r \cdot \pi}{180} = 5610,391 \dots \text{ km} \approx 5610 \text{ km}$

2. Beispiel:

„Die Insel Sizilien bildet angenähert ein gleichschenkliges Kugeldreieck: Von Kap Peloro bis Trapani und von da aus bis Kap Passaro sind es je 296 km, von Kap Passaro bis Kap Peloro 186 km. Wie viel Quadratkilometer umfasst die Insel?“ (Kern, 1997: 42)

Beschriftungen siehe Abbildung 18

$r = 6370 \text{ km}$ (Radius der Erde)

$a = 296 \text{ km} \Rightarrow \frac{180 \cdot 296}{\pi r} = 2,662 \dots^\circ$

$c = 186 \text{ km} \Rightarrow \frac{180 \cdot 186}{\pi r} = 1,673 \dots^\circ$

$\alpha = \beta = ? \quad \gamma = ? \quad A = ?$

Mit Hilfe des Neper'schen Kreises lassen sich Formeln finden,

mit denen α und γ berechnet werden können und somit auch der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks.

Da $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{1}{\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}} = \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)} = \cot(90^\circ - \alpha)$ und $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

gilt, kann nach der ersten Zeile jeweils vereinfacht werden:

$$\cos \alpha = \cot\left(90^\circ - \frac{c}{2}\right) \cdot \cot a$$

$$\cos \alpha = \tan \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{\tan a}$$

$$\alpha = 71,700 \dots^\circ$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{c}{2}\right) \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \alpha$$

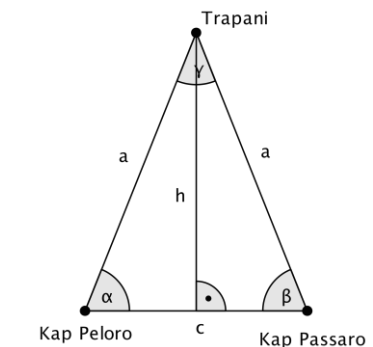


Abbildung 18: Ebene Darstellung des gleichschenkeligen Dreiecks

$$\frac{\gamma}{2} = 18,318 \dots^\circ \Rightarrow \gamma = 36,636 \dots^\circ$$

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{2\alpha + \gamma - 180}{180} = 26139,62 \dots \text{km}^2 \approx 26140 \text{km}^2$$

3.7. Allgemeine Kugeldreiecke

3.7.1. Der Sinussatz

Zur Herleitung des sphärischen Sinussatzes wird ein Dreikant eines Kugeldreiecks mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ betrachtet (siehe Abbildung 19). Es wird eine Normale auf die Strecke \overline{MA} gelegt, die durch den Eckpunkt C verläuft, ebenso wird eine Normale auf die Strecke \overline{MB} durch den Eckpunkt C errichtet. Die Schnittpunkte dieser Normalen mit den jeweiligen Strecken werden mit E und F bezeichnet. Schließlich wird noch eine Normale auf die Strecke \overline{MA} errichtet, die durch E verläuft und in der Ebene MAB liegt. Eine derartige Normale wird auch im Punkt F errichtet. Diese beiden Normalen schneiden sich im Punkt D und die Verbindung \overline{CD} steht normal auf die Ebene MAB . Es sind die 4 ebenen rechtwinkligen Dreiecke $\triangle CFM$ mit rechtem Winkel bei F , $\triangle CEM$ mit rechtem Winkel bei E , $\triangle CDE$ und $\triangle CDF$ mit rechtem Winkel jeweils bei D entstanden, in denen der Sinus, der aus der Ebene bekannt ist, angewandt werden kann:

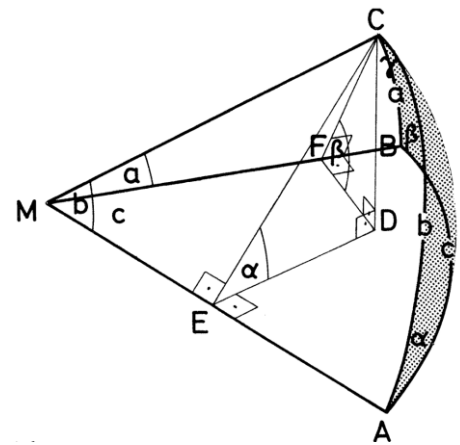


Abbildung 19: Dreikant (Ulrich, 1963: 390)

$$\sin a = \frac{\overline{CF}}{\overline{CM}}$$

$$\sin b = \frac{\overline{CE}}{\overline{CM}}$$

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\frac{\overline{CF}}{\overline{CM}}}{\frac{\overline{CE}}{\overline{CM}}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CE}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}}{\frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CE}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Ebenso kann diese Formel für die Seite c und dessen Gegenwinkel hergeleitet werden und man erhält den sphärischen Sinussatz:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

In Worten bedeutet dies: Dividiert man den Sinus einer Seite durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels, so erhält man immer das selbe Ergebnis.

(vgl. Ulrich, 1963: 390-392)

3.7.2. Der Seitencosinussatz

Zur Herleitung wird ein Kugeldreieck betrachtet, das durch Einzeichnen der Höhe in zwei rechtwinkelige Dreiecke geteilt wird (siehe Abbildung 20).

Mit Hilfe des „Pythagoras“ in sphärischen Dreiecken können in den rechtwinkligen Dreiecken I ($\triangle ABD$) und II ($\triangle ACD$) folgende Beziehungen aufgestellt werden:

$$\triangle ABD: \cos c = \cos h_a \cdot \cos q$$

$$\cos h_a = \frac{\cos c}{\cos q}$$

$$\triangle ACD: \cos b = \cos h_a \cdot \cos p$$

$$\cos h_a = \frac{\cos b}{\cos p}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos c}{\cos q} = \frac{\cos b}{\cos p}$$

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos q}{\cos p}$$

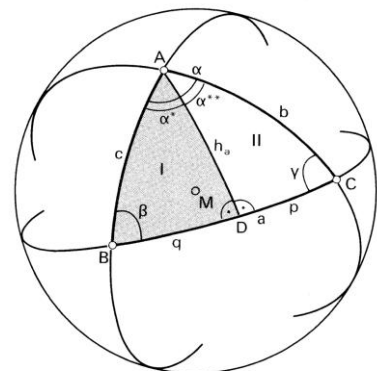


Abbildung 20: Allgemeines Kugeldreieck (vgl. Kern, 1997: 43)

Da $q = a - p$ ist, kann man einsetzen und erhält:

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos(a - p)}{\cos p}$$

$$\cos c \cdot \cos p = \cos b \cdot \cos(a - p)$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme kann der Ausdruck $\cos(a - p)$ vereinfacht werden:

$$\cos c \cdot \cos p = \cos b \cdot (\cos a \cdot \cos p + \sin a \cdot \sin p)$$

$$\cos c \cdot \cos p = \cos b \cdot \cos a \cdot \cos p + \cos b \cdot \sin a \cdot \sin p$$

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \cos b \cdot \sin a \cdot \tan p$$

Am Neper'schen Kreis des Dreiecks $\triangle ACD$ (Abbildung 21) kann man die Beziehung $\cos \gamma = \tan p \cdot \cot b$ erkennen, weshalb für $\tan p = \tan b \cdot \cos \gamma$ eingesetzt werden kann und man somit eine der 3 Formeln für den Seitencosinussatz erhält:

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \cos b \cdot \sin a \cdot \tan b \cdot \cos \gamma$$

$$\Rightarrow \cos c = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos \gamma$$

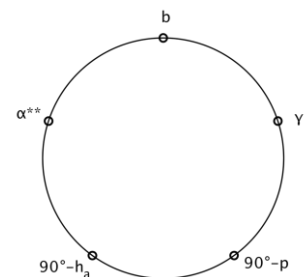


Abbildung 21: Neper'scher Kreis des Dreiecks ACD

Vollständig lautet der Seitencosinussatz:

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos \gamma$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

(vgl. Kern, 1997: 43,46)

In Worten bedeutet dies:

Addiert man zum Produkt der Cosinus von zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks das Produkt der Sinus der beiden Seiten und des Cosinus des eingeschlossenen Winkels, so erhält man den Cosinus der übrigen Seite. (vgl. Ulrich, 1963: 395)

3.7.3. Der Winkelcosinussatz

Die bekannte Formel des Seitencosinussatzes wird auf das Polardreieck angewandt:

$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos \gamma'$$

Da sich die Seiten eines Polardreiecks mit den entsprechenden Winkeln und auch umgekehrt auf 180° ergänzen, ergibt sich folgendes:

$$\cos(180^\circ - \gamma) = \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \beta) + \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \beta) \cdot$$

$$\cdot \cos(180^\circ - c)$$

Da $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ und $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ gilt, kann vereinfacht werden und nach Multiplikation mit -1 erhält man eine der drei möglichen Formeln des Winkelcosinussatzes:

$$-\cos \gamma = (-\cos \alpha) \cdot (-\cos \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot (-\cos c)$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$$

Der Winkelcosinussatz lautet somit:

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos b$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$

(vgl. Kern, 1997: 47)

In Worten bedeutet dies:

„Im Kugeldreieck ist der Kosinus eines Winkels gleich der Differenz aus dem Produkt der Sinus der übrigen Winkel und des Kosinus der Gegenseite des ersten Winkels und dem Produkt der Kosinus der übrigen Winkel.“ (Ulrich, 1963: 397)

Beispiel auf der Erde:

Berechne die kürzeste Entfernung von Hollabrunn (49°N 16°O) nach Male (4°N 73°O), der Hauptstadt der Malediven!

e.....kürzeste Entfernung Hollabrunn-Male

a..... $90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$

b..... $90^\circ - 4^\circ = 86^\circ$

γ $73^\circ - 16^\circ = 57^\circ$ (Differenz der geographischen Längen)

N.....Nordpol

r.....Radius der Erde (6370 km)

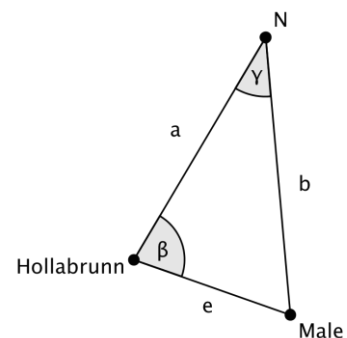


Abbildung 22: Ebene Darstellung des sphärischen Dreiecks Hollabrunn-Male-Nordpol

Zur Berechnung der Entfernung wird ein Dreieck, das als

dritten Eckpunkt den Nordpol hat, herangezogen (siehe Abbildung 22).

$$\cos e = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

$$\cos e = 0,4090 \dots$$

$$e = 65,852 \dots^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{e \cdot \pi \cdot r}{180} = 7321,28 \dots \approx 7320 \text{ km}$$

Wird ein Winkel von einem Längenmeridian und einem Großkreis eingeschlossen, so spricht man von einem Kurswinkel. Gemessen wird ein Kurswinkel jeweils vom Längenmeridian über Osten und Süden nach Westen. Deshalb gilt für einen Kurswinkel α : $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ (vgl. Kern, 1997: 54)

Fortsetzung des vorherigen Beispiels:

Berechne den Kurswinkel β von Hollabrunn nach Male!

Mit Hilfe des Seitencosinussatzes:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos e + \sin a \cdot \sin e \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos e}{\sin a \cdot \sin e}$$

$$\cos \beta = 0,39921 \dots$$

$$\beta = 66,471 \dots \approx 66,5^\circ$$

Zur selben Lösung gelangt man mit dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin e}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \gamma \cdot \sin b}{\sin e}$$

$$\sin \beta = 0,9168 \dots$$

$$\beta = 66,471 \dots \approx 66,5^\circ$$

3.8. Die Sätze von Legendre und Soldner

Zur Vereinfachung des Rechnens mit sphärischen Dreiecken können mit Hilfe des Satzes von Legendre und mit dem Satz von Soldner kleine Dreiecke wie ebene Dreiecke behandelt werden.

Satz von Legendre: Vermindert man die Winkel eines sphärischen Dreiecks jeweils um $\frac{1}{3}$ des sphärischen Exzesses und lässt die Seiten unverändert, so kann das Dreieck wie ein ebenes Dreieck behandelt werden und somit können die Formeln aus der ebenen Trigonometrie angewendet werden.

Satz von Soldner: Vermindert man die Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks jeweils um $\frac{a^3}{6R^2}$, $\frac{b^3}{6R^2}$, $\frac{c^3}{6R^2}$ und lässt die Winkel unverändert, so kann es wie ein ebenes Dreieck behandelt

werden und somit können die Formeln aus der ebenen Trigonometrie angewendet werden.
(vgl. Neustätter, 2002: 61)

Beispiel zum Satz von Legendre:

Von einem Dreieck auf der Erde ($R = 6370 \text{ km}$) kennt man die Winkel $\alpha = 70^\circ$ und $\beta = 40^\circ$. Zudem ist bekannt, dass die Seite $c = 300 \text{ km}$ lang ist und dass der sphärische Exzess ε ungefähr $0,04083074$ beträgt.

Berechne die Länge der Seite a (Abbildung 23) 1.) mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie 2.) ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung 3.) mit Hilfe des Satzes von Legendre!

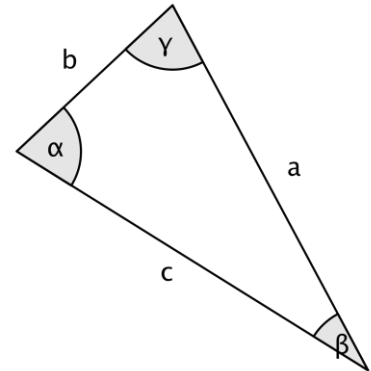


Abbildung 23: Dreieck auf der Erde

1.) $c = 300 \text{ km} \approx 2,698^\circ$

Berechnung von γ mit Hilfe des Winkelcosinussatzes:

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$$

$$\gamma = 70,040 \dots \approx 70,0^\circ$$

Berechnung von a mit Hilfe des sphärischen Sinussatzes:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$a = 2,6976 \dots^\circ = 299,9222259134 \dots \text{ km}$$

2.) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 70^\circ$

Berechnung von a mit Hilfe des Sinussatzes in der Ebene:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a = 300 \text{ km}$$

3.) $\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3} = 69,986 \dots^\circ$

$$\beta' = \beta - \frac{\varepsilon}{3} = 39,986 \dots^\circ$$

$$\gamma' = 180^\circ - \alpha' - \beta' = 70,027 \dots^\circ$$

Berechnung von a mit Hilfe des Sinussatzes in der Ebene:

$$\frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{c}{\sin \gamma'}$$

$$a = 299,9222259139 \dots \text{ km}$$

=> Aus den Ergebnissen kann man erkennen, dass bei Anwendung des Satzes von Legendre die Seite a bis auf Tausendstel- bzw. Zehntausendstel Millimeter genau dem Ergebnis

entspricht, das mit sphärischen Formeln ermittelt wurde. Bei Vernachlässigung der Erdkrümmung wird ein Fehler von $0,07777 \dots \text{ km} \approx 78 \text{ m}$ bzw. $0,026\%$ begangen.

4. Sphärische Astronomie

4.1. Einführung

Die sphärische Astronomie beschäftigt sich unter anderem mit den Möglichkeiten, wie die Positionen von Sternen am Himmel beschrieben werden können. Die echte Position des Sterns im Raum und somit auch die Entfernung zum Beobachter ist dabei meist nicht von Bedeutung. (vgl. Kern, 1997: 73) Je nach Lage des Ursprungs im astronomischen Koordinatensystem kann man zwischen topozentrischen Koordinaten, geozentrischen Koordinaten, baryzentrischen Koordinaten, heliozentrischen Koordinaten und galaktozentrischen Koordinaten unterscheiden. Der Ursprung der baryzentrischen Koordinaten liegt im Schwerpunkt des Systems Erde-Mond. Dieser Schwerpunkt befindet sich ungefähr 1700 km unterhalb der Erdoberfläche im Erdinneren. Die heliozentrischen Koordinaten haben ihren Ursprung im Schwerpunkt des Sonnensystems, welcher nicht der Sonnenmittelpunkt ist, sondern sich entweder innerhalb oder nahe der Sonnenkugel befindet. Bei den galaktozentrischen Koordinaten befindet sich der Ursprung im Zentrum unserer Galaxie, der Milchstraße. Im Zusammenhang mit dieser vorwissenschaftlichen Arbeit sind die geozentrischen und topozentrischen Koordinaten von Bedeutung. Der Ursprung liegt bei geozentrischen Koordinaten im Mittelpunkt der Erde. Hingegen haben topozentrische Koordinaten ihren Ursprung im Auge des Beobachters, der sich auf der Erdoberfläche befindet. Bei großen Distanzen kann der Unterschied zwischen den beiden Koordinatensystemen vernachlässigt werden. Betrachtet man jedoch den Mond, so tritt beim Mondort der topozentrischen und geozentrischen Koordinaten schon ein Unterschied von 1° auf. (vgl. Keller, 2008: 38-39, 66, 84)

Bei den anschließend beschriebenen Systemen wird der Ursprung immer im Erdmittelpunkt liegen. Zur Beschreibung der Position eines Sternes wird eine Himmelskugel mit sehr großem Radius um die Erde, die der Mittelpunkt ist, gedacht. Unter der Position eines Sternes versteht man den Ort seiner Projektion auf die gedachte Himmelskugel. (vgl. Kern, 1997: 73)

4.2. Begriffserklärungen

Wie auf der Erde gibt es auf der Himmelskugel einen Nord- und Südpol, wobei der Nordpol der Himmelskugel beinahe die selbe Position wie der Polarstern hat. Die beiden Himmelspole entstehen, wenn die Erdachse verlängert wird und die Himmelskugel schneidet. Die verlängerte Erdachse wird dabei als Weltachse bezeichnet. Schneidet man die Himmelskugel mit der Ebene des Erdäquators, so erhält man den Himmelsäquator, ein Großkreis, welcher die Himmelskugel in eine nördliche und südliche Hemisphäre teilt.

Unter dem Zenit versteht man jenen Punkt, der entsteht, wenn man die Verlängerung des Erdradius durch den Ort des Beobachters mit der Himmelskugel schneidet. Der Zenit, dessen Gegenpunkt Nadir bezeichnet wird, liegt also senkrecht über dem Beobachter. Legt man durch den Beobachtungsort eine Tangentialebene und schneidet diese mit der Himmelskugel, so erhält man den scheinbaren Horizont(kreis). Wird die Tangentialebene aber nicht durch den Beobachtungsort gelegt sondern parallel verschoben, so dass sie durch den Erdmittelpunkt verläuft, so ist das Ergebnis des Schnittes mit der Himmelskugel der wahre Horizont(kreis). Da der Erdradius im Vergleich zum Radius der Himmelskugel sehr klein ist, wird zwischen scheinbarem und wahren Horizont eines Beobachtungsortes nicht unterschieden. Der Horizontkreis ist also ein Großkreis, auf dessen Ebene die Verbindung Beobachtungsort – Zenit im rechten Winkel steht.

Als Himmelsmeridian eines Beobachtungsortes bezeichnet man den Großkreis, der durch den Zenit des Beobachtungsortes und den Himmelspol verläuft (Abbildung 24). Die Ebene dieses Großkreises entspricht der Ebene des Längengrades durch den Beobachtungsort auf der Erde. Die zwei Schnittpunkte von Himmelsmeridian und Horizont sind der Nord- und der Südpunkt.

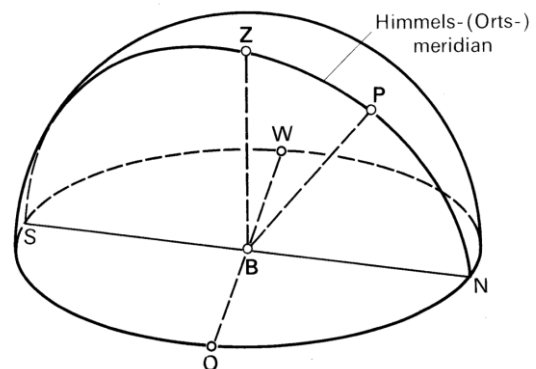


Abbildung 24: Himmelsmeridian und Himmelsrichtungen (Kern, 1997: 74)

Wird eine Gerade normal auf die Verbindungsstrecke von Nord- und Südpunkt, der Nord-Süd-Linie, gelegt, die durch den Beobachtungsort verläuft, so erhält man als Schnitt mit dem Horizontkreis den Ost- und den Westpunkt. Durch diese vier Punkte sind die Himmelsrichtungen festgelegt. (vgl. Kern, 1997: 73-74)

Da sich die Erde in 24 Stunden einmal um die Weltachse dreht, scheint es, als würden sich die Sterne in Kreisbahnen und somit die Himmelskugel um die Erde bewegen. Ein Stern legt auf seiner Kreisbahn pro Stunde 15° zurück. Sterne, die sich in der Nähe des jeweiligen Himmelpols befinden, können die ganze Nacht beobachtet werden. Diese Sterne, deren gesamte Kreisbahn über dem Horizont liegt, heißen Zirkumpolarsterne (Abbildung 25). Sterne, deren Kreisbahn auch unterhalb des Horizontes des Beobachtungsortes liegen, gehen wie die Sonne jeden Tag auf und unter. Die Schnittpunkte von Horizont und der Kreisbahn eines Sterns werden als Auf- und Untergangspunkt bezeichnet. Jener Teil des Kreisbogens eines Sterns über dem Horizont wird als Tagbogen bezeichnet. Schneidet man diesen Bogen mit dem Meridian des Beobachtungsortes, so erhält man den Kulminationspunkt. Dies ist der höchste Punkt des Sterns über dem Horizont des Beobachters.

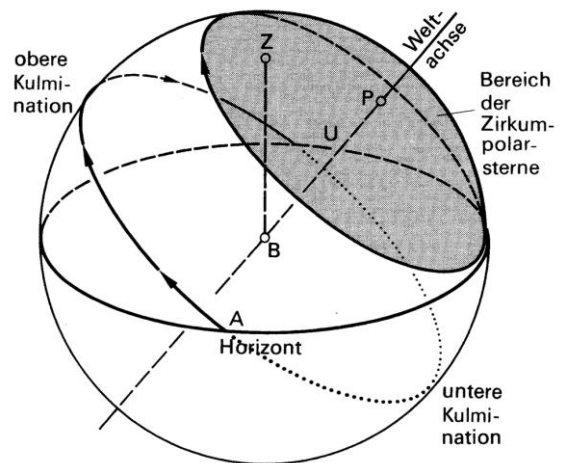


Abbildung 25: Zirkumpolarsterne, Kulminationspunkte (vgl. Kern, 1997: 75)

Es gibt aber auch einen tiefsten Punkt unter oder über dem Horizont, der als unterer Kulminationspunkt bezeichnet wird. Je mehr man sich einem Pol auf der Erde nähert, desto mehr nähert sich der Zenit dem Himmelpol. Somit nimmt auch die Anzahl der Zirkumpolarsterne zu. Am Nord- und Südpol der Erde gibt es also nur Zirkumpolarsterne. Im Gegensatz dazu, gibt es am Äquator keine Zirkumpolarsterne, dort sind alle Tagbögen Halbkreise. (vgl. Kern, 1997: 74-76)

4.3. Das Horizontsystem

Bei diesem System wird der Horizont eines jeweiligen Beobachtungsortes als Grundkreis angenommen (Abbildung 26). Die Höhe h eines Sterns wird vom Horizont aus in Richtung Zenit gemessen, somit ist die Höhe eines Sterns im Zenit 90° und die Höhe eines Sterns am Horizont 0° . Falls ein Stern unterhalb des Horizontes liegt ist sein Höhenwinkel negativ. Anstatt des Höhenwinkels

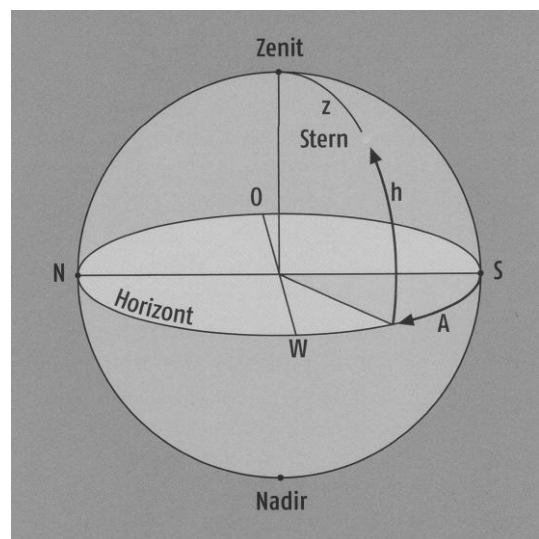


Abbildung 26: Das Horizontsystem (Keller, 2008: 39)

wird auch oft der Komplementärwinkel, die Zenitdistanz, $z = 90^\circ - h$ angegeben. Ist die Zenitdistanz größer als 90° , so befindet sich der Stern unterhalb des Horizontes. Die zweite Koordinate wird entlang des Horizontes gemessen. Der Startpunkt für den zweiten Winkel ist der Südpunkt, also der Schnittpunkt von Meridian und Horizont. Von dort wird der Winkel in der Ebene des Horizontes in Richtung Westen gemessen. Dieser Winkel wird Azimut bezeichnet und ist bei einem Stern in Südrichtung 0° , in Westrichtung 90° , in Nordrichtung 180° und in Ostrichtung 270° . Die vier Punkte der Himmelsrichtungen werden Kardinalpunkte des Horizontes genannt und die Verbindung der Punkte Ost und West, die durch Zenit und Nadir läuft, wird als erstes Vertikal bezeichnet. Aufgrund der Erddrehung ändern sich die Koordinaten ständig mit der Zeit, daher sind die Horizontalkoordinaten nicht für die Einstellung eines Teleskops geeignet. (vgl. Keller, 2008:

39)

Durch Angabe der Zenitdistanz bzw. der Höhe eines Himmelspols kann die geographische Breite des Beobachtungsortes ermittelt werden. Wie in Abbildung 27 ersichtlich, ist die geographische Breite wegen des Satzes über Normalwinkel gleich der Höhe des Himmelspols. Auf der Nordhalbkugel ist die Höhe des Himmelspols beinahe gleich mit der Höhe des Polarsterns. (vgl. Kern, 1997: 77)

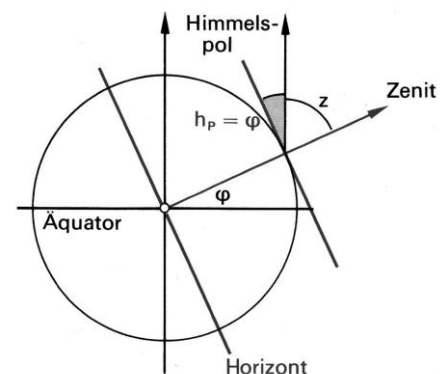


Abbildung 27: Bestimmung der geographischen Breite mit Hilfe des Himmelspols (Kern, 1997: 77)

In Hollabrunn steht der Polarstern bei der Höhe $h = 49^\circ$, woraus sich für die geographische Breite von Hollabrunn 49° ergibt.

Beispiel zur Berechnung der Mondentfernung mit Hilfe der Zenitdistanz:

„Im Jahr 1751 berechneten die Astronomen Lalande und Lacaille die Entfernung des Mondes von der Erde. Ersterer bestimmte zu diesem Zweck an einem Standort in Berlin (Breite $\varphi_B = 52,52^\circ$) die Zenitdistanz eines Punktes A der Mondoberfläche (beim Meridiandurchgang) zu $z_B = 41,26^\circ$ und Letzterer zum selben Zeitpunkt an einem Standort in Kapstadt ($\varphi_K = -33,92^\circ$) die Zenitdistanz $z_K = 46,56^\circ$. Es ist $\lambda_B = \lambda_K$. Berechne daraus die Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt!“ (Kern, 1997: 79)

$\lambda_B = \lambda_K$ bedeutet, dass die beiden Städte gleiche geographische Länge haben.

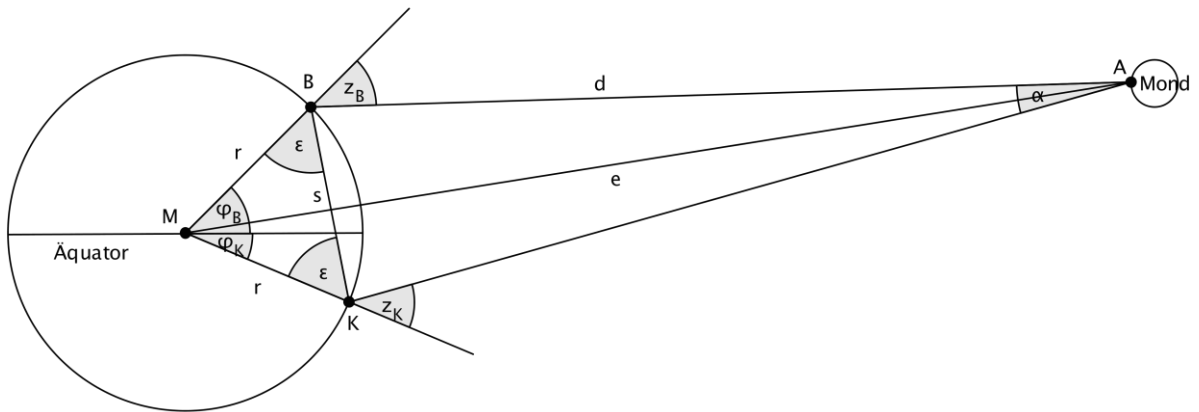


Abbildung 28: Erde-Mond

e.....Entfernung Erdmittelpunkt – Punkt A auf der Mondoberfläche

r.....Erdradius (6370 km)

Weitere Beschriftungen siehe Abbildung 28

Um auf e zu gelangen, müssen zuerst die Strecken s und d und die Winkel α und ϵ berechnet werden:

$$\alpha = 360^\circ - \varphi_B - |\varphi_K| - (180^\circ - z_B) - (180^\circ - z_K) = 1,38^\circ \text{ (Winkelsumme im Viereck MKAB)}$$

$$s^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos(\varphi_B + |\varphi_K|) \text{ (Cosinussatz im Dreieck MKB)}$$

$$s = 8724,37 \dots \text{ km}$$

$$\epsilon = \frac{180^\circ - (\varphi_B + |\varphi_K|)}{2} = 46,78^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha}{s} = \frac{\sin(180^\circ - \epsilon - z_K)}{d} \text{ (Sinussatz im Dreieck BKA)}$$

$$d = 361\,644,07 \dots \text{ km}$$

$$e^2 = r^2 + d^2 - 2dr \cdot \cos(180^\circ - z_B) \text{ (Cosinussatz im Dreieck MBA)}$$

$$e = 366\,456,64 \dots \text{ km} \approx 366\,500 \text{ km}$$

4.4. Das Äquatorsystem

Beim Äquatorsystem wird der Himmelsäquator als Grundkreis angenommen. Die erste Koordinate wird Deklination δ bezeichnet. Sie gibt den Abstand des Sterns vom Äquator in Richtung Himmelspol an. Der Himmelsnordpol hat die Deklination $\delta=90^\circ$, während der Himmelssüdpol die Deklination $\delta=-90^\circ$ hat. Liegt ein Stern am Äquator, so hat er die Deklination $\delta=0^\circ$. Die zweite Koordinate ist abhängig davon, ob es ein ortsfestes, also erdverbundenes oder ein mitbewegtes, also rotierendes Äquatorsystem

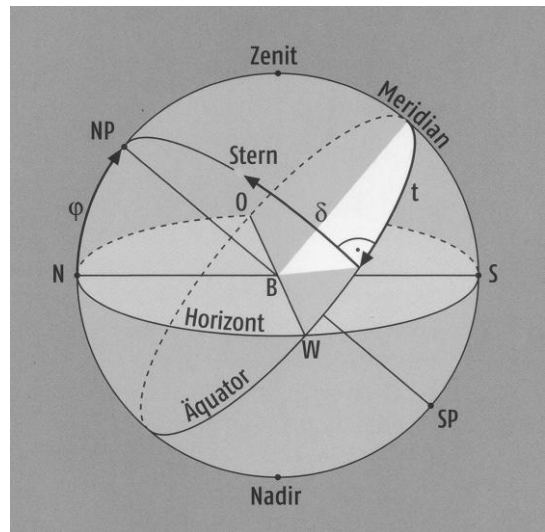


Abbildung 29: Ortsfestes Äquatorsystem (Keller, 2008: 40)

ist. Prinzipiell wird die zweite Koordinate in der Äquatorebene gemessen. Bei einem ortsfesten Äquatorsystem (Abbildung 29) wird die zweite Koordinate als Stundenwinkel t bezeichnet. Dieser wird vom Schnittpunkt des Meridians des Beobachtungsortes mit dem Äquator aus in Richtung Westen gemessen. Er gibt also die Zeit an, die seit der letzten oberen Kulmination eines Sterns verstrichen ist. Der Stundenwinkel wird meist nicht in Grad, sondern in Stunden angegeben, dabei hat eine Stunde 15° , eine Minute hat $15'$ und eine Sekunde hat $15''$. Der Sinn des Äquatorsystems ist, dass sich die Deklination sowohl beim ortsgelassenen, als auch beim mitbewegten Äquatorsystem nicht ändert. Beim mitbewegten Äquatorsystem (Abbildung 30) wird als Nullpunkt der Frühlingspunkt, der die Himmelsdrehung mitmacht, gewählt. Der Frühlingspunkt γ bezeichnet den Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der Ekliptik. Die zweite Koordinate im mitbewegten Äquatorsystem wird Rektaszension α bezeichnet. Sie wird in der Äquatorebene vom Frühlingspunkt in Richtung Osten gemessen und wie der Stundenwinkel nicht in Grad, sondern in Stunden angegeben. Der Frühlingspunkt hat die Rektaszension $\alpha=0^h$, während der Herbstpunkt eine Rektaszension $\alpha=12^h$ hat. Da der Frühlingspunkt mitrotiert, ist das bewegte Äquatorsystem

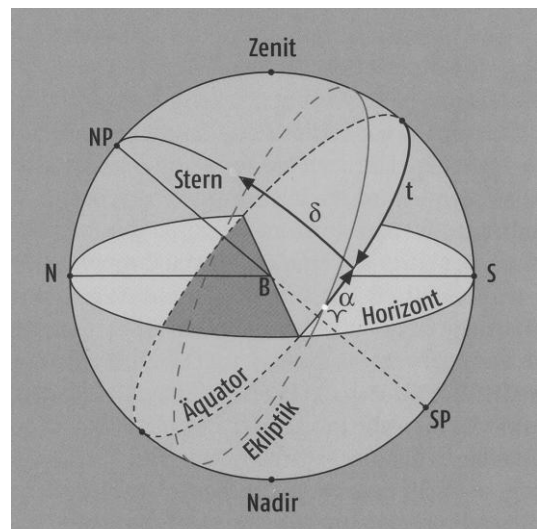


Abbildung 30: Mitrotierendes Äquatorsystem (Keller, 2008: 40)

ist. Prinzipiell wird die zweite Koordinate in der Äquatorebene gemessen. Bei einem ortsfesten Äquatorsystem (Abbildung 29) wird die zweite Koordinate als Stundenwinkel t bezeichnet. Dieser wird vom Schnittpunkt des Meridians des Beobachtungsortes mit dem Äquator aus in Richtung Westen gemessen. Er gibt also die Zeit an, die seit der letzten oberen Kulmination eines Sterns verstrichen ist. Der Stundenwinkel wird meist nicht in Grad, sondern in Stunden angegeben, dabei hat eine Stunde 15° , eine Minute hat $15'$ und eine Sekunde hat $15''$. Der Sinn des Äquatorsystems ist, dass sich die Deklination sowohl beim ortsgelassenen, als auch beim mitbewegten Äquatorsystem nicht ändert. Beim mitbewegten Äquatorsystem (Abbildung 30) wird als Nullpunkt der Frühlingspunkt, der die Himmelsdrehung mitmacht, gewählt. Der Frühlingspunkt γ bezeichnet den Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der Ekliptik. Die zweite Koordinate im mitbewegten Äquatorsystem wird Rektaszension α bezeichnet. Sie wird in der Äquatorebene vom Frühlingspunkt in Richtung Osten gemessen und wie der Stundenwinkel nicht in Grad, sondern in Stunden angegeben. Der Frühlingspunkt hat die Rektaszension $\alpha=0^h$, während der Herbstpunkt eine Rektaszension $\alpha=12^h$ hat. Da der Frühlingspunkt mitrotiert, ist das bewegte Äquatorsystem

unabhängig von der täglichen Himmelsdrehung und somit gut für die Angabe von Gestirnsörtern geeignet.

Der Stundenwinkel des Frühlingspunktes wird Sternzeit ϑ genannt. Die Sternzeit verbindet das ortsfeste und bewegte Äquatorsystem miteinander. Dabei gilt für die Sternzeit folgende Beziehung zwischen Rektaszension und Stundenwinkel eines Sterns:

$$\vartheta = \alpha + t$$

Durch Umformen erhält man auch:

$$t = \vartheta - \alpha$$

Kennt man also die Sternzeit und die Rektaszension eines Sterns, so kann man den Stundenwinkel t ermitteln. Kulminiert ein Stern, so ist sein Stundenwinkel Null und die Rektaszension dieses Sterns entspricht der Sternzeit. (vgl. Keller, 2008: 40-41)

4.5. Das nautische Dreieck

Mit Hilfe des nautischen Dreiecks lassen sich Horizontkoordinaten in Äquatorkoordinaten und umgekehrt umrechnen. Dabei versteht man unter einem nautischen Dreieck jenes Dreieck mit den Eckpunkten Pol, Zenit und Sternort.

Umrechnung von Horizontkoordinaten in Äquatorkoordinaten (Abbildung 31):

Die Horizontkoordinaten $z = 90^\circ - h$ und das Azimut a , das vom Südpunkt aus gemessen wird, sowie die geographische Breite φ eines Beobachtungsortes sind bekannt. Um auf die Äquatorkoordinaten δ und t zu gelangen, wendet man im sphärischen Dreieck Zenit-Pol-Gestirn den Seitencosinussatz und Sinussatz an, wobei die Zusammenhänge

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$,
 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ und $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 zum Vereinfachen verwendet werden.

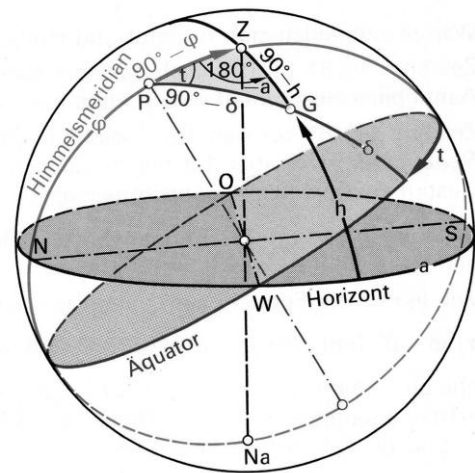


Abbildung 31: Nautisches Dreieck (vgl. Kern, 1997: 85)

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - h) \cdot \\ &\quad \cdot \cos(180^\circ - a) \\ \sin \delta &= \sin \varphi \cdot \cos z - \cos \varphi \cdot \sin z \cdot \cos a \end{aligned}$$

$$\frac{\sin t}{\sin z} = \frac{\sin(180^\circ - a)}{\sin(90^\circ - \delta)}$$

$$\sin t = \frac{\sin a \cdot \sin z}{\cos \delta}$$

Umrechnung von Äquatorkoordinaten in Horizontkoordinaten (Abbildung 31):

Die Äquatorkoordinaten δ und t , sowie die geographische Breite φ eines Beobachtungsortes sind bekannt. Um auf die Horizontkoordinaten a und $z = 90^\circ - h$ zu gelangen, wird der Seitencosinussatz und der Sinussatz im Dreieck Pol-Gestirn-Zenit angewandt, wobei wieder die Zusammenhänge $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ und $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ zum Vereinfachen genutzt werden.

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos t$$

$$\cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$$

$$\frac{\sin(180^\circ - a)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin t}{\sin(90^\circ - h)}$$

$$\sin a = \frac{\sin t \cdot \cos \delta}{\sin z}$$

(vgl. Kern, 1997: 85)

4.6. Weitere Zusammenhänge zwischen Horizontkoordinaten und Äquatorkoordinaten

Da die Äquatorebene um $90^\circ - \varphi$ (φ ... geographische Breite des Beobachtungsortes) gegen den Horizont geneigt ist, hat der Schnittpunkt von Äquator und Meridian, der Äquatorkulm genannt wird, die Höhe $h = 90^\circ - \varphi$ (Abbildung 32). Die Kulminationshöhe h eines Gestirns mit der Deklination δ lässt sich durch $h = 90^\circ - \varphi + \delta$ berechnen. Ist die Deklination eines Gestirns gleich der geographischen Breite des Beobachtungsortes, also $\delta = \varphi$, so kulminiert es im Zenit. Zirkumpolarsterne, also Sterne, die nicht untergehen, müssen die

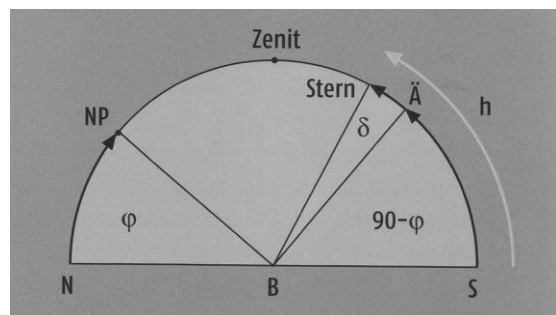


Abbildung 32: Meridianschnitt (Keller, 2008: 42)

Zirkumpolarbedingung $\delta \geq 90^\circ - \varphi$ erfüllen. Dies ergibt sich daraus, dass Zirkumpolarsterne vom Pol höchstens die geographische Breite entfernt sein dürfen, weil sonst ihre Bahn auch unterhalb des Horizontes liegen würde.

Aufgrund der Neigung der Äquatorebene gegen die Horizontebene kann von der Nordhalbkugel auch ein Teil des Südhimmels und von der Südhalbkugel ein Teil des Nordhimmels beobachtet werden. Der Äquator kulminiert in der Höhe $h = 90^\circ - \varphi$, daher sind alle Gestirne mit der Deklination $\delta \geq \varphi - 90^\circ$ sichtbar. Ist die Deklination $\delta < \varphi - 90^\circ$, so wird dieses Gestirn am Beobachtungsort mit der geographischen Breite φ niemals sichtbar sein. (vgl. Keller, 2008: 42-43)

4.7. Auf- und Untergangszeiten der Sonne

Wegen der Bewegung der Erde um die Sonne gibt es zwei unterschiedliche Definitionen eines Tages. Der Sonnentag ist definiert als die Zeit, die zwischen zwei Kulminationen der Sonne an einem Beobachtungsort vergeht. Da die Erde jedoch täglich einen Bogen von ca. $0,9863^\circ$ um die Sonne zurücklegt, ist die Zeit zwischen den Kulminationen um ca. 4 Minuten länger als die Zeit, die vergeht, bis ein Beobachter auf der Erde die weit entfernten Fixsterne am Himmel wieder sieht. Ein Sterntag ist also die Zeit, die für eine vollständige Umdrehung, im Bezug auf die Fixsterne, benötigt wird. Daher kann auch beobachtet werden, dass der exakte Sternenhimmel eines bestimmten Tages am nächsten Tag schon um vier Minuten früher zu sehen ist. (vgl. Kern, 1997: 89-90)

Die Sonne bewegt sich im Laufe eines Jahres entlang der Ekliptik, die einen Großkreis auf der Himmelskugel darstellt. Sie verändert somit ihre Position vor den Fixsternen und durchwandert dabei die zwölf Tierkreiszeichen. Die genauen Koordinaten der Sonne werden jährlich neu berechnet. Sie werden in Tabellenwerken, den Ephemeriden, dargestellt. Die Koordinaten ändern sich nur wenig von Jahr zu Jahr und daher reicht für ungefähre Berechnungen auch die Formel $\delta = 23,5^\circ \cdot \sin t$. Dabei gibt t die Zahl der Tage seit dem Frühlingsanfang an, wobei ein Monat jeweils 30 Tage hat. Am Tag der Wintersonnenwende ist die Deklination am kleinsten, während am Tag der Sommersonnenwende die Deklination am größten ist. Am Tag des Frühlings- und Herbstbeginnes ist die Deklination gleich 0° und somit geht die Sonne genau im Ostpunkt auf und im Westpunkt unter und Nacht und Tag sind gleich lang. An allen anderen Tagen geht die Sonne nicht genau im Ostpunkt auf und im Westpunkt unter. Die Morgenweite bezeichnet den Winkel zwischen Ostpunkt und

Aufgangspunkt vom Beobachter aus gemessen. Die Abendweite bezeichnet den Winkel zwischen Westpunkt und Untergangspunkt. (vgl. Kern, 1997: 89-92)

Berechnung der Sonnenuntergangszeit und der Abendweite:

Zur Lösung dieses Problems wird ein nautisches Dreieck mit den Eckpunkten Zenit Z, Pol P und Untergangspunkt U betrachtet (Abbildung 33). Die Distanz z vom untergehenden Gestirn beziehungsweise von der untergehenden Sonne zum Zenit beträgt 90° . Ebenso sind die Deklination δ der Sonne, sowie die geographische Breite φ des Beobachtungsortes bekannt. Zur Bestimmung des Stundenwinkels t, der die Zeit angibt, die seit dem Meridiandurchgang vergangen ist, wird der Seitencosinussatz im nautischen Dreieck angewandt und zur Vereinfachung werden die Beziehungen $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ und $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ herangezogen:

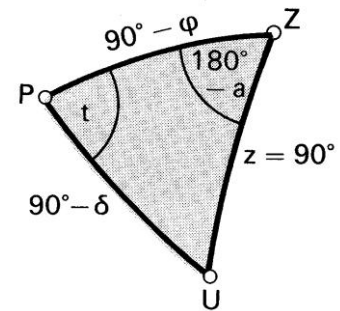


Abbildung 33: Nautisches Dreieck (vgl. Kern, 1997: 92)

angewandt und zur Vereinfachung werden die Beziehungen $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ und $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ herangezogen:

$$\cos z = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos t$$

$$\cos 90^\circ = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$$

$$0 = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$$

$$-\sin \varphi \cdot \sin \delta = \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$$

$$\cos t = -\tan \varphi \cdot \tan \delta$$

t in Stunden und Minuten umgerechnet gibt die Zeit an, die seit der Kulmination der Sonne vergangen ist. Nimmt man an, dass die Sonne genau um 12 Uhr kulminiert, so geht die Sonne um $12\text{h} + t$ unter und da der Kulminationspunkt den Tagbogen halbiert, beträgt die Tageslänge $2t$.

Kennt man das Azimut a, das berechnet werden kann, so kann man die Abendweite bestimmen. Das Azimut a lässt sich mit Hilfe des Seitencosinussatzes berechnen und auch hier finden die Beziehungen $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ und $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ Anwendung:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos z + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin z \cdot \cos(180^\circ - a)$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \cos 90^\circ - \cos \varphi \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos a$$

$$\sin \delta = 0 - \cos \varphi \cdot 1 \cdot \cos a$$

$$\cos a = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

Da das Azimut a vom Südpunkt über den Westpunkt gemessen wird, kann man, je nachdem welchen Wert a hat, durch Subtrahieren von 90° oder durch Addieren von 90° die Abendweite bestimmen. (vgl. Kern, 1997: 92-93)

Beispiel:

Bestimme die Tageslänge und die Abendweite des 10. Februars 2015 in Hollabrunn ($\varphi = 49^\circ$)! Die Sonne hat an diesem Tag die Deklination $\delta = -14,6^\circ$.

$$\cos t = -\tan \varphi \cdot \tan \delta$$

$$t = 72,5635 \dots^\circ = 4\text{h } 50\text{ min } 15\text{s}$$

$$\cos a = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

$$a = 67,40482 \dots^\circ$$

$$90^\circ - a = 22,595 \dots \approx 23^\circ$$

Die Tageslänge des 10. Februars 2015 ist also ungefähr 9h 40min und die Abendweite beträgt ca. 23° Süd.

5. Formelsammlung

Im folgenden Abschnitt werden alle Formeln, die im Zuge dieser Arbeit hergeleitet wurden, aufgelistet.

$$r = \sqrt{R^2 - a^2} \dots\dots\dots\text{Berechnung des Kleinkreisumfangs (vgl. Hame, 1995: 13)}$$

$$U = 2\pi R \cdot \cos \alpha \dots\dots\dots\text{Berechnung des Umfangs eines Breitenkreises (vgl. Hame, 1995: 11)}$$

$$S_{\widehat{AB}} = \pi \cdot R \cdot \frac{\alpha}{180} \dots\dots\dots\text{Sphärischer Abstand (vgl. Kern, 1997: 14)}$$

$$A_Z = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi R^2 \dots\dots\dots\text{Flächeninhalt eines Kugelzweiecks (vgl. Kern, 1997: 14)}$$

$$A_{\Delta ABC} = \pi R^2 \cdot \frac{\varepsilon}{180^\circ} \dots\dots\dots\text{Flächeninhalt eines Kugeldreiecks (vgl. Kern, 1997:23)}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \dots\dots\dots\text{Sinus eines Winkels im rechtwinkligen sphärischen Dreieck (vgl. Kern, 1997: 33)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \dots\dots\dots\text{Cosinus eines Winkels im rechtwinkligen sphärischen Dreieck (vgl. Kern, 1997: 33)}$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b} \dots\dots\dots\text{Tangens eines Winkels im rechtwinkligen sphärischen Dreieck (vgl. Kern, 1997: 33)}$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \dots\dots\dots\text{„Satz des Pythagoras“ im rechtwinkligen sphärischen Dreieck (vgl. Kern, 1997: 33)}$$

$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ Sinussatz im sphärischen Dreieck (vgl. Ulrich, 1963: 392)

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$ Seitencosinussatz im sphärischen Dreieck (vgl. Kern, 1997: 46)

$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$ Winkelcosinussatz im sphärischen Dreieck (vgl. Kern, 1997: 47)

$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \cos z - \cos \varphi \cdot \sin z \cdot \cos a$ Berechnung der Deklination eines Gestirns (vgl. Kern, 1997: 85)

$\sin t = \frac{\sin a \cdot \sin z}{\cos \delta}$ Berechnung des Stundenwinkels eines Gestirns (vgl. Kern, 1997: 85)

$\cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$ Berechnung der Zenitdistanz eines Gestirns (vgl. Kern, 1997: 85)

$\sin a = \frac{\sin t \cdot \cos \delta}{\sin z}$ Berechnung des Azimuts eines Gestirns (vgl. Kern, 1997: 85)

6. Schluss

6.1. Zusammenfassung

Auf einer Sphäre darf nicht mit den Formeln der Ebene gearbeitet werden, außer es sind kleine Dreiecke, in denen der Satz von Legendre oder Soldner angewandt wird. Für allgemeine Kugeldreiecke gibt es den Sinussatz, Seitencosinussatz und den Winkelcosinussatz, die den Sätzen aus der Ebene ähnlich sind. Sie werden anschaulich mit Hilfe von rechtwinkligen sphärischen Dreiecken hergeleitet, wobei es für rechtwinklige Kugeldreiecke die Regel von Neper gibt. Diese Regel erleichtert das Rechnen mit rechtwinkligen sphärischen Dreiecken, da man sich die Formeln nicht auswendig merken muss. Neben dem Sinussatz, Seitencosinussatz und Winkelcosinussatz gibt es noch viele weitere Formeln für Kugeldreiecke. Diese werden im Rahmen dieser vorwissenschaftlichen Arbeit nicht besprochen, da sie aufwändige Herleitungen haben und für die Anwendungen, auf die näher eingegangen wird, nicht gebraucht werden. Neben den Formeln zur Berechnung von Seiten und Winkeln werden auch die Flächeninhaltsformeln für ein Kugelzweieck und ein Kugeldreieck anschaulich hergeleitet. Bei der Herleitung der Flächeninhaltsformel für ein sphärisches Dreieck wird mit Hilfe von Kugelzweiecken argumentiert.

Das Interessante an Formeln ist ihre Anwendung, weshalb sich die zweite Hälfte der vorwissenschaftlichen Arbeit der sphärischen Astronomie widmet. Dabei werden das Horizontalsystem und das Äquatorsystem genau beschrieben und auch ihre Zusammenhänge dargelegt. Zur Umrechnung der beiden Koordinatensysteme wird ein nautisches Dreieck herangezogen, in dem der Seitencosinussatz und der Sinussatz der Sphäre Anwendung finden. Neben der Umrechnung zwischen diesen beiden Koordinatensystemen kann mit Hilfe eines nautischen Dreiecks auch die Tageslänge sowie die Auf- und Untergangszeit der Sonne eines bestimmten Tages berechnet werden. Dies ist aber nur ein vereinfachtes Modell, da in der Realität noch einige weitere Faktoren berücksichtigt werden müssen.

6.2. Schlusswort

Nach dem Verfassen der Arbeit bin ich der Meinung, dass die sphärische Trigonometrie nicht viel schwieriger als die ebene Trigonometrie ist. Da fast alles durch Skizzen nachvollzogen wird, finde ich, dass das Thema sehr leicht verstanden und durchdacht werden kann. Besonderen Spaß hatte ich beim Rechnen der Beispiele. Sie basieren auf realistischen

Angaben und die Lösungen entsprechen auch ungefähr der Realität. Daher hat es mich sehr beeindruckt, was sich mit den Formeln, die in meiner vorwissenschaftlichen Arbeit hergeleitet werden, berechnen lässt.

7. Quellenverzeichnis

7.1. Literaturverzeichnis

Hame, Rudolf (1995). Sphärische Trigonometrie Additium Jahrgangsstufe 11. München: Ehrenwirth Verlag GmbH

Keller, Hans-Ulrich (2008). Kompendium der Astronomie. Stuttgart: Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co.KG

Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl.

Neustätter, Sophie (2002). Sphärische Geometrie und Kartographie. Wien

Schaumüller, Stephanie (2010). Wie mache ich die Erde flach? - Kugelgeometrie und Kartennetzentwürfe. Wien

Sigl, Rudolf (1969). Ebene und Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen auf Kartographie, Geodäsie und Astronomie. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft

Steinert, Klaus-Günter (1977). Sphärische Trigonometrie mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft

Ulrich, Georg (1963). Geometrie zum Selbstunterricht 1. Wiesbaden: August Schultze Verlag

7.2. Internetquellen

spektrum.de. Geodäte – Lexikon der Astronomie. url:
<http://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/geodaete/141> (04.10.2014)

8. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Großkreise: Eigene Darstellung nach Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.18

Abbildung 2: Berechnung des Kleinkreisradius: Eigene Darstellung nach Hame, Rudolf (1995). Sphärische Trigonometrie Additium Jahrgangsstufe 11. München: Ehrenwirth Verlag GmbH. B.S.13

Abbildung 3: Berechnung des Umfangs eines Breitenkreises: Eigene Darstellung nach Hame, Rudolf (1995). Sphärische Trigonometrie Additium Jahrgangsstufe 11. München: Ehrenwirth Verlag GmbH. B.S.13

Abbildung 4: Sphärischer Abstand: Eigene Darstellung nach Steinert, Klaus-Günter (1977). Sphärische Trigonometrie mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie. Leipzig: Teubner. B.S.30

Abbildung 5: Vergleich sphärischer und direkter Abstand: Eigene Darstellung

Abbildung 6: Tabelle: Eigene Darstellung

Abbildung 7: Wölbung des Attersees: Eigene Darstellung

Abbildung 8: Kugelzweieck: Eigene Darstellung nach Hame, Rudolf (1995). Sphärische Trigonometrie Additium Jahrgangsstufe 11. München: Ehrenwirth Verlag GmbH. B.S.30

Abbildung 9: Kugeldreieck: Hame, Rudolf (1995). Sphärische Trigonometrie Additium Jahrgangsstufe 11. München: Ehrenwirth Verlag GmbH. B.S.33 Abbildung 22

Abbildung 10: Nebendreiecke: Hame, Rudolf (1995). Sphärische Trigonometrie Additium Jahrgangsstufe 11. München: Ehrenwirth Verlag GmbH. B.S.44 Abbildung 32

Abbildung 11: Ebenen mit jeweiligen Normalen durch den Punkt S: Eigene Darstellung

Abbildung 12: Ebenen mit jeweiligen Normalen durch den Punkt S, der auf der Schnittgeraden liegt: Eigene Darstellung

Abbildung 13: Polardreieck: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.29 Fig. 29 – bearbeitet

Abbildung 14: Flächeninhalt eines Kugeldreiecks: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.22 Fig. 20 – bearbeitet

Abbildung 15: Dreikant: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.32 Fig. 30

Abbildung 16: Neper'scher Kreis: Eigene Darstellung nach Sigl, Rudolf (1969). Ebene und Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen auf Kartographie, Geodäsie und Astronomie. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft. B.S.284

Abbildung 17: Ebene Darstellung des Kugeldreiecks: Eigene Darstellung

Abbildung 18: Ebene Darstellung des gleichschenkeligen Dreiecks: Eigene Darstellung

Abbildung 19: Dreikant: Ulrich, Georg (1963). Geometrie zum Selbstunterricht 1. Wiesbaden: August Schultze Verlag. B.S.390 Abb. 326

Abbildung 20: Allgemeines Kugeldreieck: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.43 Fig. 42 – bearbeitet

Abbildung 21: Neper'scher Kreis des Dreiecks ACD: Eigene Darstellung nach Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.43

Abbildung 22: Ebene Darstellung des sphärischen Dreiecks Hollabrunn-Male-Nordpol: Eigene Darstellung

Abbildung 23: Dreieck auf der Erde: Eigene Darstellung

Abbildung 24: Himmelsmeridian und Himmelsrichtungen: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.74 Fig. 67

Abbildung 25: Zirkumpolarsterne, Kulminationspunkte: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.75 Fig. 69 – bearbeitet

Abbildung 26: Das Horizontsystem: Keller, Hans-Ulrich (2008). Kompendium der Astronomie. Stuttgart: Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co.KG. B.S.39

Abbildung 27: Bestimmung der geographischen Breite mit Hilfe des Himmelspols: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.77 Fig. 74

Abbildung 28: Erde-Mond: Eigene Darstellung

Abbildung 29: Ortsfestes Äquatorsystem: Keller, Hans-Ulrich (2008). Kompendium der Astronomie. Stuttgart: Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co.KG. B.S.40

Abbildung 30: Mitrotierendes Äquatorsystem: Keller, Hans-Ulrich (2008). Kompendium der Astronomie. Stuttgart: Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co.KG. B.S.40

Abbildung 31: Nautisches Dreieck: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.85 Fig. 81 – bearbeitet

Abbildung 32: Meridianschnitt: Keller, Hans-Ulrich (2008). Kompendium der Astronomie. Stuttgart: Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co.KG. B.S.42

Abbildung 33: Nautisches Dreieck: Kern, Hans et al. (1997). Sphärische Trigonometrie. München: Bayrischer Schulbuch-Verl. B.S.92 Fig. 86 – bearbeitet

Selbstständigkeitserklärung

Name: Barbara Zehetmaier

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Viendorf, am 1. Februar 2015



Zustimmung zur Aufstellung in der Schulbibliothek

Ich gebe mein Einverständnis, dass ein Exemplar meiner vorwissenschaftlichen Arbeit in der Schulbibliothek meiner Schule aufgestellt wird.

Viendorf, am 1. Februar 2015

