

Berichte der Gruppen

Sphärische Geometrie

Teilnehmer:

Andreas-Gymnasium

1 Mädchen, 3 Jungen

Herder-Gymnasium

1 Mädchen, 3 Jungen

Immanuel-Kant-Gymnasium

1 Junge

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

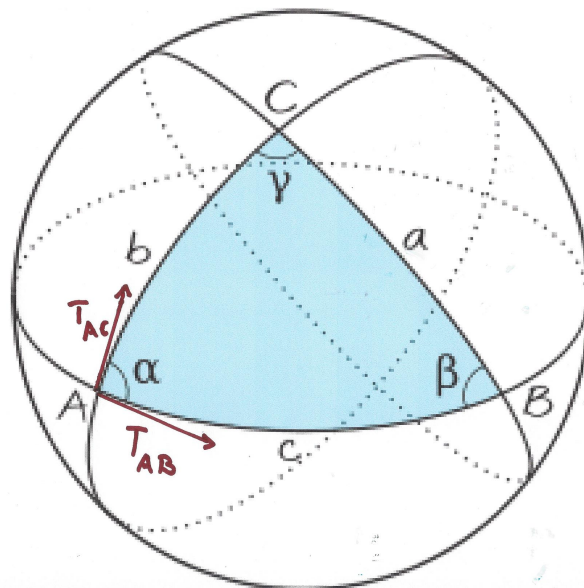
Matthias Riddermann

Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Helga Baum

Humboldt-Universität zu Berlin



Die sphärische Geometrie befasst sich mit geometrischen Verhältnissen auf der Kugeloberfläche, die man auch *Sphäre* nennt. In dem Seminar haben wir uns insbesondere mit der Frage befasst, wie man Abstände von Punkten auf der Sphäre berechnet, wie man in Analogie zur Euklidischen Geometrie ein Dreieck auf der Sphäre (sphärisches Dreieck) definiert und welche Beziehungen für sphärische Dreiecke zwischen Seitenlängen, Innenwinkelmaßen und Flächeninhalt gelten.

1. Grundlagen

1.1. Vektorrechnung

Zunächst haben wir Grundlagen der Vektorrechnung im 3-dimensionalen Euklidischen Raum behandelt und grundlegende Operationen mit Vektoren kennengelernt. Wir beschreiben diese hier in Koordinaten:

Definition 1. *Addition von Vektoren:*

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}.$$

Gegenvektor:

$$-\vec{v} := \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w}).$$

Skalare Multiplikation mit reellen Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}.$$

Norm (oder Länge) eines Vektors:

$$\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Skalarprodukt von Vektoren:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Vektorprodukt von Vektoren

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt erlaubt es uns, den Winkel $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ zwischen zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} zu berechnen. Mit Hilfe des Cosinussatzes für Euklidische Dreiecke zeigt man:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}).$$

Für vom Nullvektor verschiedene Vektoren folgt also

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}. \quad (1)$$

Für das Vektorprodukt haben wir folgende Eigenschaften hergeleitet, die wir später häufig benutzt haben:

- a) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \angle(\vec{v}, \vec{w})$ *Länge des Vektorproduktes*
- b) $\vec{v} \perp (\vec{v} \times \vec{w})$ und $\vec{w} \perp (\vec{v} \times \vec{w})$ *Orthogonalität*
- c) $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ sind positiv orientiert (Rechte-Hand-Regel) *Orientierung*
- d) $\langle \vec{v} \times \vec{w}, \vec{u} \times \vec{p} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{w}, \vec{p} \rangle - \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{p} \rangle$ *Lagrange-Identität*
- e) $\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \cdot \vec{w} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u}$ *Grassmann-Identität*

1.2. Kurven und ihre Länge

Im Seminar haben wir Kurven im Euklidischen Raum besprochen, diese mithilfe von Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem mit x-, y- und z-Achse im \mathbb{R}^3 dargestellt und ihre Länge definiert und berechnet. Wir haben die Koordinaten von Punkten und Vektoren in Zeilenform

$$(x, y, z)^t := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

geschrieben.

Definition 2. Eine *parametrisierte Kurve* im \mathbb{R}^3 ist eine Abbildung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$t \in I \mapsto \gamma(t) =: (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))^t \in \mathbb{R}^3,$$

deren Komponentenfunktionen $\gamma_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, stetig sind. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *differenzierbar (stetig differenzierbar, ...)*, wenn jede der Komponentenfunktionen γ_k die entsprechende Eigenschaft hat. Statt *parametrisierte Kurve* sagen wir auch kurz nur *Kurve*.

Für die Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ haben wir anschließend nicht nur Stetigkeit, sondern auch Differenzierbarkeit vorausgesetzt, um die Tangenten der Kurve analytisch beschreiben zu können.

Definition 3. Sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^t : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\gamma'(t) := (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))^t$$

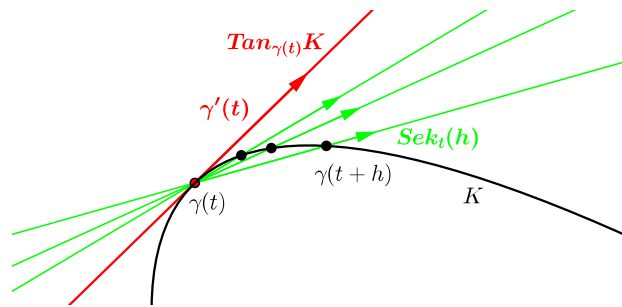
Tangentenvektor von γ im Parameter $t \in I$. Die Kurve γ heißt im Parameter $t \in I$ *regulär*, wenn $\gamma'(t) \neq 0$.

Durch die Nutzung der Charakterisierung der Konvergenz im Euklidischen Raum mithilfe von Koordinaten, können wir für den Tangentenvektor $\gamma'(t)$ folgendes erkennen:

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Ist $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, so beschreibt die Gerade

$$\text{Tan}_{\gamma(t)}K := \gamma(t) + \mathbb{R} \cdot \gamma'(t)$$



die *Tangente an die Kurve* $K = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$ im *Kurvenpunkt* $\gamma(t)$. Sie entsteht als Grenzgerade der *Sekanten* $Sek_t(h)$ durch $\gamma(t)$ und $\gamma(t+h)$ bei $h \rightarrow 0$:

$$Sek_t(h) := \gamma(t) + \mathbb{R} \cdot \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

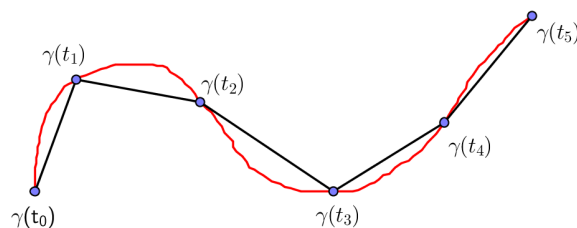
Um die Länge einer Kurve zu definieren, haben wir die geometrische Intuition verwendet. Dabei knüpfen wir an ein Verfahren an, das von den Mathematikern der Antike verwendet wurde, um den Kreisumfang durch reguläre n -Ecke zu approximieren und zu berechnen.

Sei $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine endliche Menge von Teilungspunkten des Intervalls $[a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$.

Dann beschreibt

$$L(\gamma, \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

die Länge des durch die Zerlegung \mathcal{P} definierten *Sehnenpolygons* durch die *Punkte* $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$. Fügt man weitere Teilungspunkte hinzu, wird das dadurch entstehende Sehnenpolygon wegen der Drei-



ecksungleichung höchstens länger. Je kleiner wir die Abschnitte wählen, desto genauer nähern wir uns der Kurve an. Dadurch können wir definieren:

Definition 4. Sei $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L(\gamma) := \begin{cases} \sup\{L(\gamma, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}, & \text{falls sup existiert,} \\ +\infty, & \text{falls sup nicht existiert,} \end{cases}$$

die *Länge von* γ .

Ist eine Kurve γ stetig differenzierbar, dann kann man ihre Länge mit Hilfe eines Riemann-Integrals berechnen. Wir haben im Seminar den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt für ihre Länge

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (2)$$

2. Die Sphäre

2.1. Beschreibungen der Sphäre durch Koordinaten

Wir geben zuerst verschiedene Möglichkeiten an, die Punkte auf der Sphäre zu beschreiben.

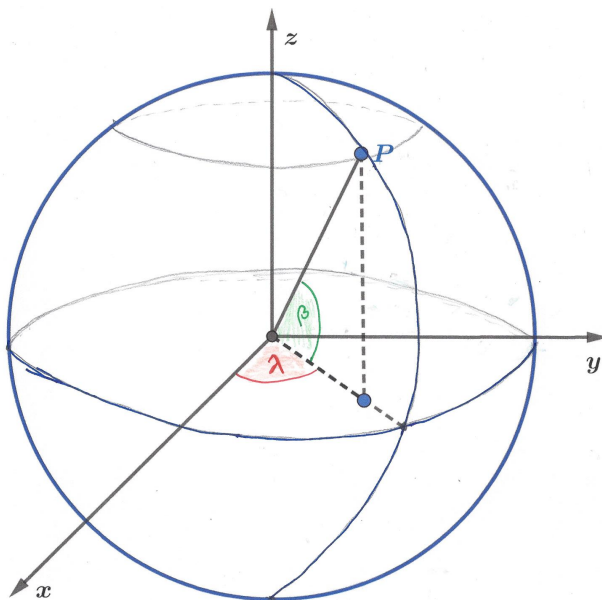
Definition 5. Die Sphäre im Euklidischen Raum \mathcal{E}^3 mit Mittelpunkt $O \in \mathcal{E}^3$ vom Radius R ist die Punktmenge

$$S_R^2 := \{P \in \mathcal{E}^3 \mid |OP| = R\}.$$

Benutzt man ein kartesisches Koordinatensystem, deren Ursprung im Mittelpunkt O der Sphäre liegt, dann kann man die Sphäre auch durch eine Gleichung für die Koordinaten ihrer Punkte (*Euklidische Koordinaten*) angeben. Es gilt:

$$S_R^2 = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Man kann jeden Punkt P der Sphäre auch durch zwei Winkelkoordinaten $\lambda \in (-\pi, \pi]$ und $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ beschreiben.



λ beschreibt hierbei den Längenhalfkreis (Meridian) und β den Breitenkreis, auf dem der Punkt P liegt.

In Formeln gilt:

$$P = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \cdot \cos \lambda \\ \cos \beta \cdot \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die Sphäre:

$$S_R^2 = \left\{ R \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \cdot \cos \lambda \\ \cos \beta \cdot \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \mid \lambda \in [-\pi, \pi] \wedge \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Man nennt λ und β die *sphärischen Koordinaten*. Die sphärischen Koordinaten werden auch in der Geographie benutzt. Die Erde ist zwar keine Kugel, sondern hat eher die Form eines Ellipsoiden mit drei unterschiedlichen Achsen. Für Entfernungsbestimmungen oder ähnliche Aufgaben ist es aber zulässig, die Erde als Kugel mit dem Radius $R = 6370 \text{ km}$ zu idealisieren, da die auftretenden Fehler so klein sind, dass man sie vernachlässigen kann. Das Koordinatensystem legt man so, dass der Null-Meridian $\lambda = 0$ durch Greenwich in England verläuft. Dann gibt man den Punkt P auf der Erdkugel im Gradmaß bzgl. dem Nullmeridian (Ost/West) und dem Äquator (Nord/Süd) an (*geographische Koordinaten*). Damit ergibt sich folgende Beziehung zwischen den geographischen und den sphärischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\text{°Ost} \cdot \pi}{180^\circ} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = -\frac{\text{°West} \cdot \pi}{180^\circ}, \\ \beta &= \frac{\text{°Nord} \cdot \pi}{180^\circ} \quad \text{bzw.} \quad \beta = -\frac{\text{°Süd} \cdot \pi}{180^\circ}. \end{aligned}$$

Beispiel 1. Geographische Koordinaten von Berlin und Andros/Bahamas (im Bermuda-Dreieck):

Berlin	13.4° Ost	52.5° Nord
Andros	77.9° West	24.8° Nord

Euklidische Koordinaten von Berlin und Andros/Bahamas:

Berlin	$(3772 \text{ km}, 899 \text{ km}, 5054 \text{ km})^t$
Andros	$(1213 \text{ km}, -5654 \text{ km}, 2672 \text{ km})^t$

2.2. Der sphärische Abstand

Schneidet man die Sphäre S_R^2 mit einer Ebene E durch den Mittelpunkt O , so ist die Schnittmenge ein Kreis in E mit dem Radius R . Man nennt solche Kreise *Großkreise* auf der Sphäre S_R^2 . Sind $A, B \in S_R^2$ zwei Punkte, die nicht diametral gegenüberliegen, dann spannen O, A, B genau eine Ebene auf, d.h. es gibt genau einen Großkreis durch A und B . Wir bezeichnen ihn mit $g_s(A, B)$. Mit \widehat{AB} bezeichnen wir den kürzeren der beiden Kreisbögen auf $g_s(A, B)$ zwischen A und B . Liegen A und B diametral gegenüber, so gibt es unendlich viele Großkreise durch A und B .

Die Länge der kürzesten Verbindungskurve zwischen zwei Punkten A und B auf der Sphäre nennt man auch *den sphärischen Abstand von A und B* und bezeichnet ihn mit $d_s(A, B)$. Als Verbindungskurven lassen wir hierbei nur Kurven zu, deren Spur auf der Sphäre liegt und die aus endlich vielen stetig differenzierbaren Stücken bestehen (Ecken sind also zugelassen).

Wir haben mit Hilfe der Formel (2) aus Satz 1 folgendes bewiesen:

Satz 2. Liegen zwei Punkte A und B der Sphäre nicht diametral gegenüber, dann ist der Großkreisbogen \widehat{AB} die kürzeste Verbindung von A nach B auf der Sphäre. Liegen A und B diametral gegenüber, so ist jeder Großkreisbogen von A nach B die kürzeste Verbindung von A nach B auf der Sphäre.

Aus diesem Satz folgt für den sphärischen Abstand von $A, B \in S_R^2$:

$$d_s(A, B) = \begin{cases} L(\widehat{AB}), & \text{falls } A \text{ und } B \text{ nicht diametral gegenüber liegen,} \\ R \cdot \pi, & \text{falls } A \text{ und } B \text{ diametral gegenüber liegen.} \end{cases}$$

Die Länge des Großkreisbogens \widehat{AB} kann man mit den Euklidischen Koordinaten der Ortsvektoren \vec{A} und \vec{B} und Formel (1) berechnen. Es gilt:

$$L(\widehat{AB}) = R \cdot \angle(\vec{A}, \vec{B}) = R \cdot \arccos\left(\frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}\right) < R \cdot \pi.$$

Beispiel 2. Zur Veranschaulichung berechnen wir nun den sphärischen Abstand von Berlin (Punkt $A = (a_1, a_2, a_3)^t$) und Andros (Punkt $B = (b_1, b_2, b_3)^t$), wofür wir zuvor die Euklidischen Koordinaten berechnet haben. Da $R = \|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = 6370 \text{ km}$, gilt

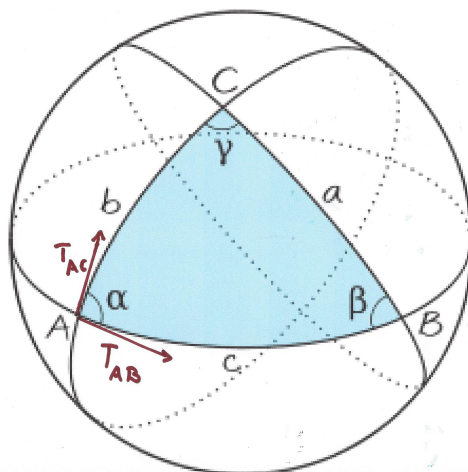
$$L(\widehat{AB}) = R \cdot \arccos\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{R^2}\right) = 7943.15 \text{ km}.$$

2.3. Sphärische Dreiecke

Um Dreiecke auf der Sphäre zu definieren, betrachten wir drei Punkte $A, B, C \in S_R^2$, welche nicht auf einem gemeinsamen Großkreis liegen. Insbesondere sind diese Punkte dann verschieden und zwei davon liegen sich nicht diametral gegenüber.

Der Großkreis $g_s(A, B)$, der durch A und B geht, teilt die Sphäre in zwei Hälften. Die Halbsphäre, auf der C liegt, bezeichnen wir mit $H(AB; C)$.

Definition 6. Die Menge $\Delta_s ABC := H(AB; C) \cap H(BC; A) \cap H(AC; B) \subset S_R^2$ heißt *sphärisches Dreieck* mit den Eckpunkten A, B, C und den Seiten \widehat{AB} , \widehat{AC} , \widehat{BC} .



T_{AB} ist hierbei der Einheitstangentenvektor, der am Großkreisbogen \widehat{AB} vom Punkt A in Richtung Punkt B zeigt. Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

$a := d_s(B, C)$	Seitenlänge von \widehat{BC}
$b := d_s(A, C)$	Seitenlänge von \widehat{AC}
$c := d_s(A, B)$	Seitenlänge von \widehat{AB}
$\alpha := \angle(T_{AB}, T_{AC})$	Innenwinkel des Dreiecks $\Delta_s ABC$ im Eckpunkt A
$\beta := \angle(T_{BA}, T_{BC})$	Innenwinkel des Dreiecks $\Delta_s ABC$ im Eckpunkt B
$\gamma := \angle(T_{CB}, T_{CA})$	Innenwinkel des Dreiecks $\Delta_s ABC$ im Eckpunkt C .

Für die Seitenlängen und Innenwinkel von sphärischen Dreiecken gelten verschiedene Sätze, davon haben wir Folgende behandelt:

Satz 3. Sei $\Delta_s ABC$ ein sphärisches Dreieck.

1. Für die Seitenlängen von $\Delta_s ABC$ gilt

$$\begin{aligned} a &= R \cdot \angle(\vec{B}, \vec{C}), \\ b &= R \cdot \angle(\vec{A}, \vec{C}), \\ c &= R \cdot \angle(\vec{A}, \vec{B}). \end{aligned}$$

2. Für die Innenwinkel von $\Delta_s ABC$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}), \\ \beta &= \angle(\vec{B} \times \vec{A}, \vec{B} \times \vec{C}), \\ \gamma &= \angle(\vec{C} \times \vec{A}, \vec{C} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Beweis: Zu 1) Dies folgt aus Satz 2.

Zu 2) Wir nutzen zum Beweis die Eigenschaften des Vektorproduktes.

a) Es gilt: $\angle(T_{AB}, T_{AC}) = \angle(\vec{A} \times T_{AB}, \vec{A} \times T_{AC})$.

Beweis: Aus der Formel (1) für das Skalarprodukt und der Lagrange-Identität für das Vektorprodukt folgt

$$\begin{aligned} \cos \angle(\vec{A} \times T_{AB}, \vec{A} \times T_{AC}) &= \frac{\langle \vec{A} \times T_{AB}, \vec{A} \times T_{AC} \rangle}{\|\vec{A} \times T_{AB}\| \|\vec{A} \times T_{AC}\|} \\ &= \frac{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \cdot \langle T_{AB}, T_{AC} \rangle - \langle \vec{A}, T_{AC} \rangle \cdot \langle T_{AB}, \vec{A} \rangle}{\|\vec{A} \times T_{AB}\| \|\vec{A} \times T_{AC}\|} \end{aligned}$$

Da \vec{A} die Länge R hat und die Einheitstangentenvektoren T_{AB} und T_{AC} senkrecht auf \vec{A} stehen, folgt aus der Formel für die Länge der Vektorprodukte

$$\|\vec{A} \times T_{AB}\| = R \quad \text{und} \quad \|\vec{A} \times T_{AC}\| = R.$$

Somit gilt

$$\cos \angle(\vec{A} \times T_{AB}, \vec{A} \times T_{AC}) = \langle T_{AB}, T_{AC} \rangle = \cos \angle(T_{AB}, T_{AC}).$$

b) Es gilt $\angle(\vec{A} \times T_{AB}, \vec{A} \times T_{AC}) = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$.

Beweis: T_{AB} ist der Tangentialvektor an den Kreis $g_s(A, B)$ in der Ebene durch O, A, B . Folglich spannen \vec{A} und T_{AB} den gleichen Vektorraum auf wie \vec{A} und \vec{B} . Die Vektoren $\vec{A} \times T_{AB}$ und $\vec{A} \times \vec{B}$ stehen senkrecht

zu diesem Vektorraum und zeigen wegen der Orientierung des Vektorproduktes in die gleiche Richtung. Somit sind die Vektoren $\vec{A} \times T_{AB}$ und $\vec{A} \times \vec{B}$ positive Vielfache voneinander. Analog sind $\vec{A} \times T_{AC}$ und $\vec{A} \times \vec{C}$ positive Vielfache voneinander. D.h.

$$\angle(\vec{A} \times T_{AB}, \vec{A} \times T_{AC}) = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}).$$

Insgesamt gilt also für den Innenwinkel α :

$$\alpha := \angle(T_{AB}, T_{AC}) = \angle(\vec{A} \times T_{AB}, \vec{A} \times T_{AC}) = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}).$$

Analog zeigt man die anderen Formeln. □

Satz 4. Sei $\Delta_s ABC \subset S_R^2$ ein sphärisches Dreieck. Dann gilt für die Seitenlängen und die Innenwinkel:

1. Der sphärische Sinussatz:

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin \gamma}.$$

2. Der sphärische Seiten-Cosinussatz:

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cdot \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \cdot \sin \frac{c}{R} \cdot \cos \alpha.$$

3. Der sphärische Winkel-Cosinussatz:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \frac{a}{R}.$$

Beweis: Zu 1) Aus der Formel für die Länge des Vektorproduktes folgt

$$\begin{aligned} \|(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{A} \times \vec{C})\| &= \|\vec{A} \times \vec{B}\| \|\vec{A} \times \vec{C}\| \cdot \sin \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}) \\ &= \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \angle(\vec{A}, \vec{B}) \cdot \|\vec{A}\| \|\vec{C}\| \sin \angle(\vec{A}, \vec{C}) \cdot \sin \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}) \\ &= R^4 \sin \frac{c}{R} \cdot \sin \frac{b}{R} \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der Grassmann-Identität für das Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \|(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{A} \times \vec{C})\| &= \| \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle \cdot \vec{A} - \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \rangle \cdot \vec{C} \| \\ &= | \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle | \|\vec{A}\| \\ &= R \cdot | \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle |. \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser Formeln ergibt:

$$R^3 \cdot \sin \frac{b}{R} \cdot \sin \frac{c}{R} \cdot \sin \alpha = | \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle |.$$

Analog gilt

$$R^3 \cdot \sin \frac{a}{R} \cdot \sin \frac{c}{R} \cdot \sin \beta = | \langle \vec{B} \times \vec{A}, \vec{C} \rangle | = | \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle |.$$

Der Vergleich der letzten beiden Formeln ergibt

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin \beta}.$$

Zu 2) Für den Winkel $\alpha = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$ folgt aus der Formel für das Skalarprodukt und der Formel für die Länge des Vektorproduktes

$$\begin{aligned} \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle &= \|\vec{A} \times \vec{B}\| \cdot \|\vec{A} \times \vec{C}\| \cdot \cos \alpha \\ &= \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \angle(\vec{A}, \vec{B}) \cdot \|\vec{A}\| \|\vec{C}\| \sin \angle(\vec{A}, \vec{C}) \cdot \cos \alpha \\ &= R^2 \sin \frac{c}{R} \cdot R^2 \sin \frac{b}{R} \cdot \cos \alpha \\ &= R^4 \cdot \sin \frac{c}{R} \cdot \sin \frac{b}{R} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der Lagrange-Identität für das Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C} \rangle &= \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \cdot \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle - \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \cdot \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle \\ &= R^2 \cdot \|\vec{B}\| \|\vec{C}\| \cos \angle(\vec{B}, \vec{C}) \\ &\quad - \|\vec{A}\| \|\vec{C}\| \cos \angle(\vec{A}, \vec{C}) \cdot \|\vec{B}\| \|\vec{A}\| \cos \angle(\vec{B}, \vec{A}) \\ &= R^4 \cos \frac{a}{R} - R^4 \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R}. \end{aligned}$$

Der Vergleich dieser beiden Formeln liefert

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \cdot \sin \frac{c}{R} \cdot \cos \alpha.$$

Zu 3) Die Beweisidee besteht darin, dem Dreieck $\Delta_s ABC$ ein *duales* Dreieck $\Delta_s A'B'C'$ zuzuordnen, dessen Eckpunkte die *Pole* des Dreiecks $\Delta_s ABC$ sind:

$$\vec{A}' := \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{\|\vec{B} \times \vec{C}\|} \cdot R, \quad \vec{B}' := \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{\|\vec{C} \times \vec{A}\|} \cdot R, \quad \vec{C}' := \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\|\vec{A} \times \vec{B}\|} \cdot R.$$

Man zeigt dann, dass die Seitenlängen und die Innenwinkel von $\Delta_s ABC$ und $\Delta_s A'B'C'$ in folgender Beziehung stehen:

$$\begin{aligned} \frac{a'}{R} &= \pi - \alpha, & \frac{b'}{R} &= \pi - \beta, & \frac{c'}{R} &= \pi - \gamma \\ \alpha' &= \pi - \frac{a}{R}, & \beta' &= \pi - \frac{b}{R}, & \gamma' &= \pi - \frac{c}{R}. \end{aligned}$$

Dann folgt der sphärische Winkel-Cosinussatz für $\Delta_s ABC$ aus dem sphärischen Seiten-Cosinussatz des Polardreiecks $\Delta_s A'B'C'$. \square

2.4. Die Innenwinkelsumme eines sphärischen Dreiecks

Die Innenwinkelsumme eines Euklidischen Dreiecks ist bekanntlich π . Für sphärische Dreiecke gilt dies nicht mehr. Die Innenwinkelsumme hängt sogar von der Größe des Dreiecks ab. Genauer gilt:

Satz 5. Sei $\Delta_s ABC \subset S_R^2$ ein sphärisches Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C , den Innenwinkeln α, β, γ und dem Flächeninhalt $Area(\Delta_s ABC)$. Dann gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{1}{R^2} \cdot Area(\Delta_s ABC).$$

Beweis: Sei P ein Punkt auf der Sphäre S_R^2 und P^d der antipodale Punkt zu P (d.h. der zweite Schnittpunkt von OP mit S_R^2). $Z(P, \theta)$ bezeichne ein sphärisches Zweieck mit den Eckpunkten P und P^d und dem Innenwinkel $\theta \in (0, \pi)$.

Für den Flächeninhalt von $Z(P, \theta)$ gilt:

$$\text{Area}(Z(P, \theta)) = 2\theta \cdot R^2. \quad (3)$$

Denn: Die Sphäre ist rotationssymmetrisch um die Achse PP^d . Folglich verhält sich der Flächeninhalt von $Z(P, \theta)$ zum Flächeninhalt der gesamten Sphäre wie θ zu 2π , d.h.

$$\frac{\text{Area}(Z(P, \theta))}{\text{Area}(S_R^2)} = \frac{\text{Area}(Z(P, \theta))}{4\pi R^2} = \frac{\theta}{2\pi}.$$



Wir betrachten nun die folgenden sphärischen Zweiecke zum Dreieck $\Delta_s ABC$ mit den Eckpunkten (A, A^d) , (B, B^d) bzw. (C, C^d) :

$$Z_A := H(AB; C) \cap H(AC; B)$$

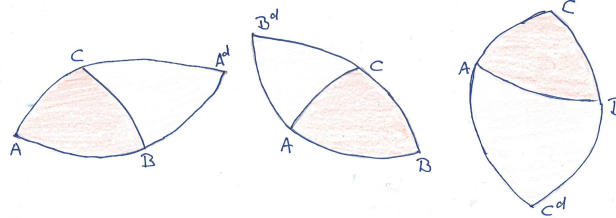
mit Innenwinkel α ,

$$Z_B := H(BA; C) \cap H(BC; A)$$

mit Innenwinkel β ,

$$Z_C := H(CB; A) \cap H(CA; B)$$

mit Innenwinkel γ ,



Diese Zweiecke zerlegen sich in die folgenden sphärischen Dreiecke:

$$Z_A = \Delta_s ABC \cup \Delta_s A^d BC$$

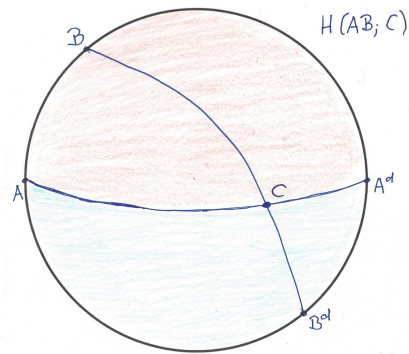
$$Z_B = \Delta_s AB C \cup \Delta_s AB^d C$$

$$Z_C = \Delta_s ABC \cup \Delta_s ABC^d$$

(4)

Der Halbraum $H(AB; C)$ zerlegt sich in das Zweieck Z_A zum Dreieck $\Delta_s ABC$ mit den Eckpunkten A, A^d und das Zweieck zum Dreieck $\Delta_s AB^d C$ mit Eckpunkten A, A^d . Folglich gilt wegen (4)

$$H(AB; C) = Z_A \cup \Delta_s AB^d C \cup \Delta_s A^d B^d C. \quad (5)$$



Betrachtet man zu einem sphärischen Dreieck $\Delta_s MPQ$ das sphärische Dreieck $\Delta_s M^d P^d Q^d$ mit den antipodalen Eckpunkten, dann zeigt Satz 3, dass beide Dreiecke gleiche Seitenlängen und gleichgroße Innenwinkel haben, sie sind also "gleich groß" (kongruent), d.h. $\text{Area}(\Delta_s MPQ) = \text{Area}(\Delta_s M^d P^d Q^d)$. Insbesondere gilt also

$$\text{Area}(\Delta_s ABC^d) = \text{Area}(\Delta_s A^d B^d C). \quad (6)$$

Aus (4),(5) und(6) folgt dann

$$\begin{aligned} \text{Area}(H(AB; C)) &= \text{Area}(Z_A) + (\text{Area}(Z_B) - \text{Area}(\Delta_s ABC)) + (\text{Area}(Z_C) - \text{Area}(\Delta_s ABC)) \\ &= \text{Area}(Z_A) + \text{Area}(Z_B) + \text{Area}(Z_C) - 2 \cdot \text{Area}(\Delta_s ABC) \\ &= 2R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2\text{Area}(\Delta_s ABC). \end{aligned}$$

Da der Flächeninhalt der Halbsphäre $2\pi R^2$ ist, folgt daraus die Formel für die Innenwinkelsumme

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{1}{R^2} \cdot \text{Area}(\Delta_s ABC).$$

□

Beispiel 3. Nun wollen wir den Flächeninhalt des Bermuda-Dreiecks mithilfe des Innenwinkelsummensatzes berechnen. Als Bermuda-Dreieck betrachten wir das sphärische Dreieck mit den Eckpunkten Miami, Bermuda und San Juan. Wir nutzen folgende Koordinaten:

Miami (M):	25,76° Nord, 80,19° West
Bermuda (B):	32,31° Nord, 64,75° West
San Juan (S):	18,47° Nord, 66,11° West.

Rechnen wir diese in Euklidische Koordinaten um, lauten sie:

$$\begin{aligned} M &= (977,63 \text{ km}, -5653,97 \text{ km}, 2768,85 \text{ km})^t \\ B &= (2296,89 \text{ km}, -4870,1 \text{ km}, 3405,3 \text{ km})^t \\ S &= (2447,24 \text{ km}, -5525,11 \text{ km}, 2018,38 \text{ km})^t. \end{aligned}$$

Nun ermitteln wir die Seitenlängen des Dreiecks $\Delta_s MBS$, wobei wir das Skalarprodukt zur Berechnung der Mittelpunktswinkel nutzen. Unsere Rechnung ergibt folgende Längen:

$$\begin{aligned} L(\widehat{MB}) &= 1667,83 \text{ km} \\ L(\widehat{BS}) &= 1548,12 \text{ km} \\ L(\widehat{SM}) &= 1674,51 \text{ km}. \end{aligned}$$

Durch Umformen der sphärischen Winkel- und Seiten-Cosinussätze und anschließendem Einsetzen in die Formel erhalten wir für den Innenwinkel bei Miami $55,7608^\circ$, für den Innenwinkel bei Bermuda $63,2103^\circ$ und für den Innenwinkel bei San Juan $62,6643^\circ$. Die umgeformte Formel für die Innenwinkelsumme des sphärischen Dreiecks lautet wie folgt:

$$\text{Area}(\Delta_s ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Setzen wir die berechneten Innenwinkel, nachdem wir diese in das Radmaß umgerechnet haben, in die Formel ein, erhalten wir für den Flächeninhalt des Bermuda-Dreiecks:

$$\text{Area}(\Delta_s MBS) = 1.158.554,77 \text{ km}^2.$$