Spezialgebiet

in

Mathematik

Sphärische Trigonometrie

Von Christoph Saulder

Inhalt

Historischer Hintergrund

Es gibt Hinweise, dass sich schon die Babylonier und Ägypter vor 4000 Jahren sich mit Problemen der sphärischen Trigonometrie beschäftigt haben um den Lauf von Gestirnen zu berechnen. Jedoch konnten sie sie nicht lösen. Die Geschichte der sphärischen Trigonometrie ist daher eng mit der Astronomie verknüpft. Ca. 350 vor Christus dachten die Griechen über Kugelgeometrie nach und wurde zu einer Hilfswissenschaft der Astronomen. In Folge werden auch die ersten Sätze aufgestellt und wenige Jahrhunderte später wurden Berechnungen zu diesen Thema angestellt. In dieser Zeit wurden auch die ersten Sternenkarten angefertigt, jedoch kannte man damals die Sinusfunktion noch nicht. Aus Indien stammte die erste Ansätze zu den Cosinussätzen. Aufbauen auf den indischen und griechischen Forschungen entwickeln die Araber im um 900 den Sinussatz. Zur Zeit der großen Entdeckungsreisen im 15. Jahrhundert wurde die Forschungen in sphärischer Trigonometrie wieder forciert. Der Sinussatz, Tangesfunktion und der neu entwickelte Seitencosinussatz wurden in dieser Zeit bereits verwendet. Im nächsten Jahrhundert folgte der Winkelcosinussatz. Durch weitre mathematische Entwicklungen wie den Logarithmus wurden im Laufe der nächsten Jahrhundert viele neue Methoden und kartographische Anwendungen der Kugelgeometrie entdeckt. Im 19. und 20. Jahrhundert wurden weitere nichteuklidische Geometrien entwickelt und die sphärische Trigonometrie fand auch ihre Anwendung in der Relativitätstheorie.

Grundlagen

Großkreise

Wenn man eine Ebene ε mit einer Kugel schneidet so erhält man einen Kreis k mit Radius $\rho \leq r$ (Kugelradius). Die Ebene ε wird Trägerebene des Kreises k genannt. Befindet sich der Kugelmittelpunkt M auf der Ebene ε, so handelt es sich beim Kreis um einen sogenannten Großkreis. Beispiele für Großkreise wären der Äquator und alle Meridiane. Zwei Punkte A und B auf der Kugeloberfläche, welche keine Gegenpunkte sind, dass heißt auf deren direkter Verbindung durch die Kugel nicht der Mittelpunkt liegt, kann exakt ein Großkreis gelegt werden. Für die Länge dieses Bogens gilt die Formel :

$S_{AB} = \varepsilon * \Pi * r / 180°$

S_{AB} ist hierbei die Länge des Bogenstückes, r der Radius der Kugel und der Winkel ε wird von den Punkten A, M und B eingeschlossen. Für zwei Gegenpunkte auf der Kugeloberfläche gibt es unendlich viele Großkreise.
Die kürzeste Strecke auf der Oberfläche einer Kugel geht entlang des, die beiden Punkte enthaltenden Großkreises. Den dafür nötigen Winkel ε erhält man durch Einsetzen in den Winkelcosinussatz der beiden Punkte $A(\varphi_A/\lambda_A)$ und $B(\varphi_B/\lambda_B)$.

$\cos(\varepsilon) = \cos(90°-\varphi_A) * \cos(90°-\varphi_B) + \sin(90°-\varphi_A) * \sin(90°-\varphi_B) * \sin(\lambda_B-\lambda_A)$

Kugelzweiecke

Durch das scheiden von zwei Großkreisen entstehen auf der Kugeloberfläche 4 Kugelzweiecke. Die Schnittpunkte der beiden Großkreise werden als P und P' bezeichnet. Ein Kugelzweieck wird durch zwei halbe Großkreise begrenzt, welche sich in den Eckpunkten P und P' scheiden. Die von einem Kugelzweieck begrenzte Oberfläche lässt sich leicht berechen. Da der Öffnungswinkel α als ein Anteil des Vollwinkels der Kugel von 360° gesehen werden kann. Auf diese Art und Weise erhält man aus der Oberflächenformel der Kugel die Formel:

$A= \alpha / 360° * 4 \Pi * r^2$

A ist die Kugelzweieck begrenzte Oberfläche und r der Radius der Kugel.

Kleinkreise

Der Schnittkreis einer Kugel und einer Ebene, die nicht durch den Kugelmittelpunkt geht, wird als Kleinkreis genannt. Sein Radius ρ lässt sich mittels gegebnen Kugelradius r und dem Winkel φ, des Schnittkreises zum zur Ebene parallel liegenden Großkreises, bestimmen.

= r * cos(φ)

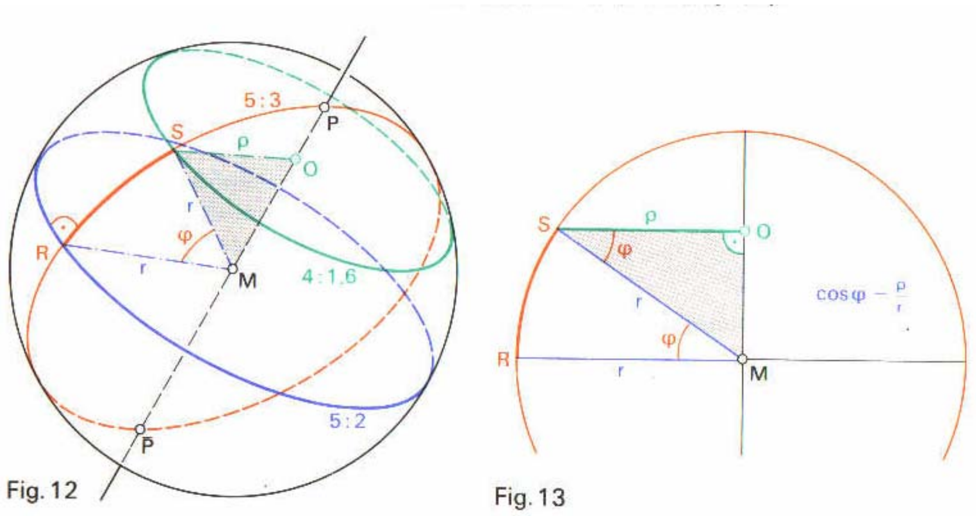


Fig. 12 Fig. 13

Begriffe

Polare: Großkreis mit Orientierung, d.h. Drehrichtung

Pol: wird durch Rechtehandregel bestimmt wenn es eine Polare gibt

Meridian: Großkreis der durch den Pol geht

Koordinaten

Um ein Koordinatensystem zu erstellen nimmt man zu erst willkürlich einen Großkreis als Äquator. Anschleißend wählt man einen Meridian als Nullmeridian und legt einen Drehsinnfest. Nun kann man die Winkel vom Äquator und vom Nullmeridian aus messen und somit jede Position auf der Kugel eindeutig festlegen. Breitenkreise sind parallel zum Äquator, während Längekreise durch die beiden Pole gehen.

Kugeldreiecke

Allgemein

Durch das schneiden dreie Großkreise erhält man 8 Kugeldreiecke, welche allesamt symmetrisch zum Kugelmittelpunkt M sind. Jedes Kugeldreieck hat ein, auf der anderen Seite der Kugel liegendes, Gegendreieck mit gleicher Fläche. Aus diesen Gegebenheiten kann man sich die Fläche $F_{\Delta ABC}$ eines Kugeldreiecks herleiten.

Die Kugeloberfläche entspricht der Fläche der durch die Großkreise begrenzten Kugelzweiecke weniger der vierfachen Fläche des gesuchten Dreiecks.

$O_{Kugel} = 2 * (F_{ZAA'} + F_{ZBB'} + F_{ZCC'}) - 4 * F_{\Delta ABC}$

$4\Pi r^2 = 2\,(\alpha/360° * 4\Pi r^2 + \beta/360° * 4\Pi r^2 + \gamma/360° * 4\Pi r^2) - 4\,F_{\Delta ABC}$

$4\Pi r^2 = 8\Pi r^2 * (\alpha + \beta + \gamma)/360° - 4 * F_{\Delta ABC}$

$F_{\Delta ABC} = 2\mathbf{P}r^2 * (\alpha + \beta + \gamma)/360° - \Pi r^2$

$F_{\Delta ABC} = \Pi r^2 * (\alpha + \beta + \gamma - 180°)/180°$

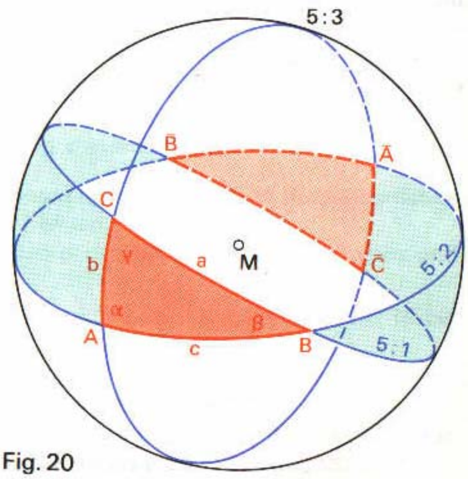


Fig. 20

Die Winkel α, β und γ liegen in den jeweiligen Eckpunkten des Dreiecks ΔABC. Der Radius r ist der Kugelradius. Da eine Fläche größer als Null sein muss, muss die Summe aller drei Innenwinkel des Dreiecks größer als 180° sein. Der Unterschied der Winkelsumme zur Winkelsumme eines euklidischen Dreiecks wird als sphärischer Exzess ε bezeichnet.

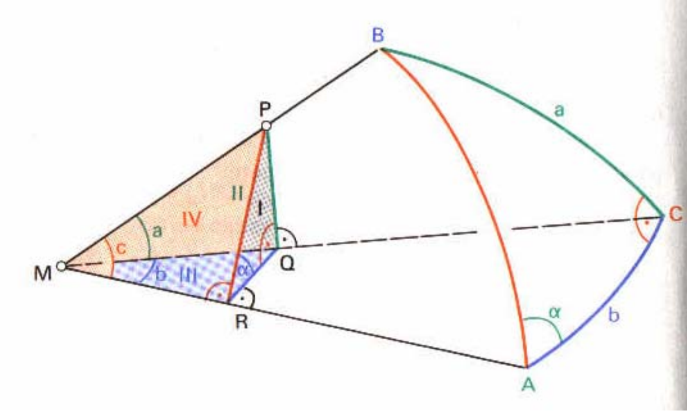
$$= \alpha + \beta + \gamma - 180°$$

In Bogenmaß gerechnet auf einer Einheitskugel stimmt der sphärische Exzess mit dem Flächeninhalt des Kugeldreiecks überein.

Dreikant

Der Dreikant wird von dem Kugeldreieck und den von den Eckpunkten zum Mittelpunkt verlaufenden Radien gebildet. Die Summe zweier Seiten eines Kugeldreiecks ist stets größer als die dritte Seite.

Rechtwinkliges Kugeldreieck



Beim Rechtwinkligen Kugeldreieck beträgt ein Winkle 90°. Man kann meist die Formeln für euklidische Dreiecke in leicht abgewandelter Form anwenden.

$\sin(\alpha) = \sin(\text{Gegenkathete}) / \sin(\text{Hypotenuse})$

$\cos(\alpha) = \tan(\text{Ankathete}) / \tan(\text{Hypotenuse})$

$\tan(\alpha) = \tan(\text{Gegenkathete}) / \tan(\text{Ankathete})$

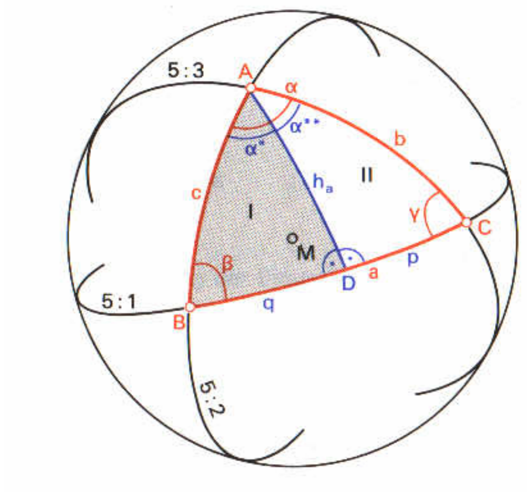
Doch es gibt auch noch weitere Formeln um die Verhältnisse von Seiten und Winkel im Kugeldreieck zu beschrieben.

$\cos(\text{Hypotenuse}) = \cos(\text{Gegenkathete}) * \cos(\text{Ankathete})$

$\cos(\alpha) = \cos(a) * \sin(\beta)$

$\cos(c) = \cot(\alpha) * \cot(\beta)$

Schiefwinkliges Kugeldreieck



Wie auch in der euklidischen Geometrie lässt sich ein schiefwinkliges Dreieck in zwei rechtwinklige durch Teilung entlang einer Höhe zerlegen. Dadurch kann meinen einen Sinussatz herleiten.

$\sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma) = \sin(a) : \sin(b) : \sin(c)$

Im Kugeldreieck kann man zwei verschiedene Cosinussätze verwenden. Der erste wäre der Seitencosinussatz, welche dem normalen Cosinussatz sehr ähnlich ist.

$\cos(c) = \cos(a) * \cos(b) + \sin(a) * \sin(b) * \cos(\gamma)$

Der Winkelcosinussatz wird durch Anwendung des Seitencosinussatzes auf das Poldreieck hergeleitet.

$\cos(\gamma) = - \cos(\alpha) * \cos(\beta) + \sin(\alpha) * \sin(\beta) \cos(c)$

Anwendungen

Navigation auf der Erde

Kurswinkel

Der Kurswinkel gibt an in welche Richtung man sich von Punkt A aus bewegen muss um zu Punkt B zu gelangen. Man muss dazu die genaue Lage der beiden Punkte auf der Kugeloberfläche wissen.

$\cos(\varepsilon) = \cos(90°-\varphi_A) * \cos(90°-\varphi_B) + \sin(90°-\varphi_A) * \sin(90°-\varphi_B) * \sin(\lambda_B-\lambda_A)$

$\cos(\omega) = (\sin(\varphi_B) – \cos(\varepsilon) * \text{sind}(\varphi_A))/(\sin(\varepsilon) * \cos(\varphi_A))$

Der Kurswinkel ω von A aus berechnet und von B aus ist nicht identisch. Das heißt möchte man sich auf den kürzesten Weg(also entlang eines Großkreises) von A nach B begeben, so muss der Kurswinkel ständig geändert werden. Diese Strecke wird als Orthodrome bezeichnet. In der Praxis wird sie aus kurzen Teilstücken mit konstanten Kurswinkel zusammengesetzt. Bewegt man sich jedoch mit konstanten Kurswinkel fort, so beschreibt man eine Loxodrome. Diese Kurve geht auf der Kugel spiralförmig zum Pol. Für den Längenunterschied zweier Orte auf einer Loxodrome gilt folgende Formel

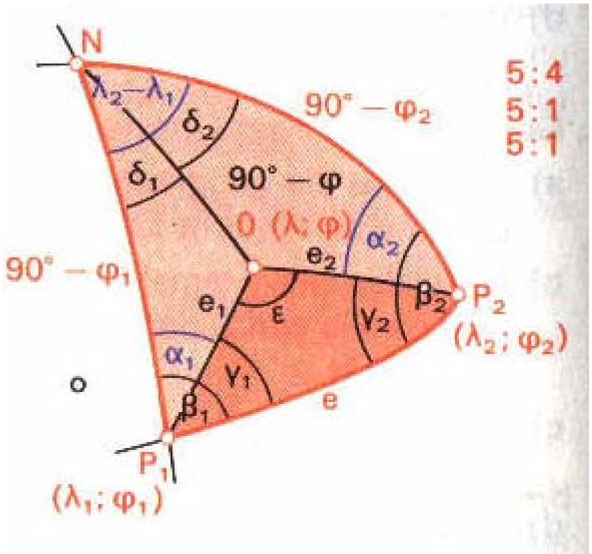
$\lambda 1 - \lambda 2 = \tan(\omega) * \ln(\tan(\varphi_2/2 + \Pi/4)/\tan(\varphi_1/2 + \Pi/4))$

Die zurückgelegte Strecke entlang eine Loxodrome in Seemeilen erhält man durch die Formel:

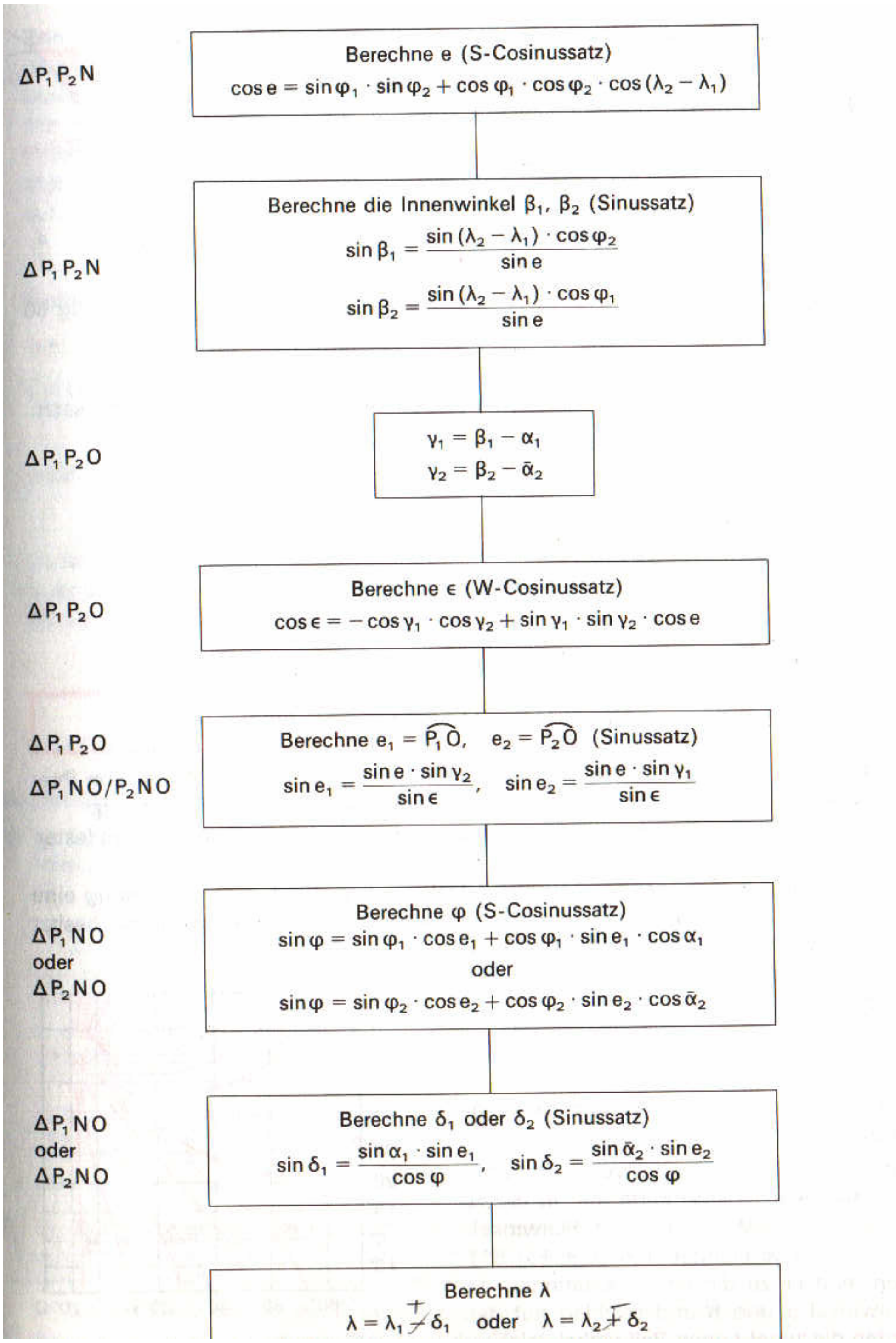
$l_{AB} = (\varphi_B - \varphi_A)/\cos(\omega)$

Funkortung

Es gibt zwei Möglichkeiten einer Funkortung. Erstens die Fremdpeilung, bei der das Objekt ein Funksignal aussendet und zweitens die Eigenpeilung, bei der zwei Peilstationen ein ungerichtetes Funksignal emittieren.



Herleitung der Fremdpeilung



Kartographie

Es gibt drei mögliche Eigenschaften von Karten: Längentreue, Winkeltreue und Flächentreue. Wobei man aber bedenken muss es gibt keine längentreue Abbildung eines Kugelstückes auf einer Ebene. Obwohl die Erde keine Kugel ist, sonder ein verbeulter Rotationsellipsoid, bringt die Annahme die Erde sei eine Kugel, eine ausreichende Näherungen, da jedes Kartenmodell so und so noch andere Nachteile besitzt.

Orthographische Projektion

Bei dieser Methode eine Kugeloberfläche auf eine Ebene zu bringen, wird eine Halbkugel senkrecht auf eine parallele Ebene projiziert. Bei diesem Kartenmodell sind die Breitenkreise längentreu. Jedoch sind die Meridiane verkürzt und gerade und es gibt weder eine Winkeltreue noch eine Flächentreue.

Orthodromische Projektion (Großkreiskarte)

Bei diesen Kartenmodell wird die Oberfläche vom Kugelmittelpunkt aus auf eine Tangentialebene projektiert. Wenn der Berührpunkt der Kugel mit der Ebene ein Pol ist so bezeichnet man sie als polständige Karte. Liegt dieser Berührpunkt am Äquator so bezeichnet man die Karte als äquatorständig. Befindet sich der Berührpunkt jedoch sonst wo auf der Kugeloberfläche wird sie zwischenständige Karte genannt. Auf diesen Kartenmodell sind alle Großkreisrouten gerade und längentreu. Aber auch diese Karte besitzt keine Winkeltreue.

Stereographische Projektion

Hier wird nun die Kugeloberfläche auf eine Tangentialebene projektiert von einem Punkt aus der den Berührpunkt der Ebene mit der Kugel gegenüberliegt. Diese Karten sind winkel- und kreistreu, jedoch zur Kosten der Flächentreue.

Zylinderentwurf von Archimedes

Man bildet die Kugeloberfläche auf einen Zylinder ab, der außerhalb der Kugel befindet und parallel zu Polachse der Kugel steht. Diese Karte ist längentreu am Äquator. Weiters ist sie flächentreue, was leider zu Kosten der Formtreue bei den Polen geht.

Mercator-Karte

Die Vorteile dieser Karte sind winkeltreue und die Loxodromen sind gerade. Jedoch lassen sich Entfernungen nicht genau entnehmen und Flächentreue ist auch nicht möglich. Die Konstruktion einer derartigen Karte ist im Vergleich zu den anderen relativ aufwendig. Die Längenkreise kann man als parallele Linien in gleichen Abstand nebeneinander eintragen. Die Breitenkreise sind zwar auch parallel, jedoch muss man ihren Abstand zum Äquator mittels einer Formel berechnen.

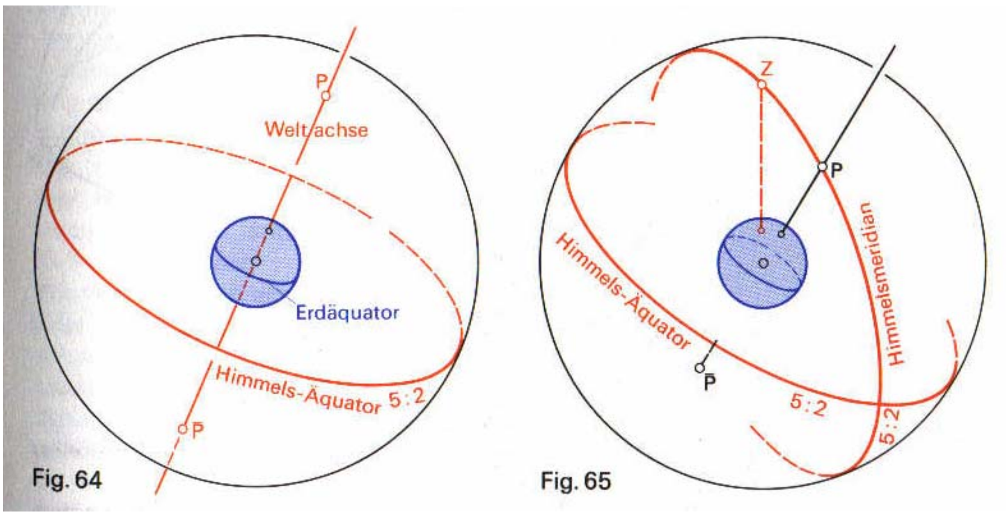
$h = l/2\Pi * \ln(\tan(\Pi/4 + \varphi/2))$

Der Abstand der Breitenkreise h wird aus der Äquatorlänge l und der geographischen Breite φ berechnet. Zum den Polen hin nimmt der Abstand stark zu und geht bei 90° gegen unendlich.

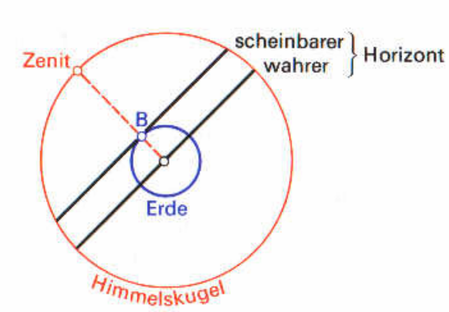
Astronomie

Grundlagen

Der Himmelsäquator wird vom Erdäquator aus projiziert und die Erdachse wird zur Weltachse verlängert. Auf diese Weise erzeugt man eine Koordinatensystem für den Himmel von der Erde aus. Als Zenit bezeichnet man jenen Punkt der sich am Himmel genau über den Beobachter befindet. Nadir ist der Name des Gegenpunktes zum Zenit auf der Himmelskugel. Der Beobachter befindet sich auf einen Punkt auf der Erdoberfläche. Die Erde wird als Kugel angenommen, welche von der Himmelskugel umgeben ist. Bei den Berechnungen geht man davon aus, dass man von Beobachtungsort aus die halbe Erdkugel sehen kann, also bis zum



wahren Horizont. Der wahre Horizont ist eine Ebene, welche beide Kugeln halbiert und ihr Normalvektor vom Erdmittelpunkt aus zum Zenit zeigt.



Der Beobachter befindet sich aber nicht im Erdmittelpunkt sonder auf der Oberfläche und sein scheinbarer Horizont wird durch eine Tangentialebene an die Erdkugel, welche durch seine Position geht, beschrieben. Auf Grund des Faktums, dass die Sterne im Verhältnis zum Erdradius fast unendlich weit entfernt sind, sind der scheinbare und der wahre Horizont praktisch identisch. Der Himmelsmeridian geht durch den Zenit und beide Pole. Alle Sterne am Himmel beschreiben durch die Drehung der Erdachse Kreisbahnen. Dabei legt jeder Stern pro Tag 360° bzw. 15°/h horizontal gemessen zurück. Es existiert das Phänomen der Zirkumpolarsterne, welche vom einen Beobachtungsort aus immer sichtbar sind. Sie befinden sich nahe eines Himmelspol. Die Größe des Zirkumpolarbereiches vom Pol weg gemessen entspricht dem Breitengrad des Beobachters. An einem Pol gibt es daher nur Zirkumpolarsterne, welche alle sich auf Bahnen parallel zum Äquator bewegen. An einem Ort am Äquator sind keine Zirkumpolarsterne zu finden und die Tagbögen aller Sterne sind dort Halbkreise. Als Tagbogen wird der Bogen bezeichnet den ein Stern vom Aufgangspunkt bis zum Untergangspunkt beschreibt. Der Schnittpunkt des Tagbogens mit dem Meridian ist der Höchstpunkt des Sternes und wird auch als Kulminationspunkt bezeichnet. Zirkumpolarsterne haben auch einen tiefsten Punkt am Tagbogen, welcher unterer Kulminationspunkt genannt wird.

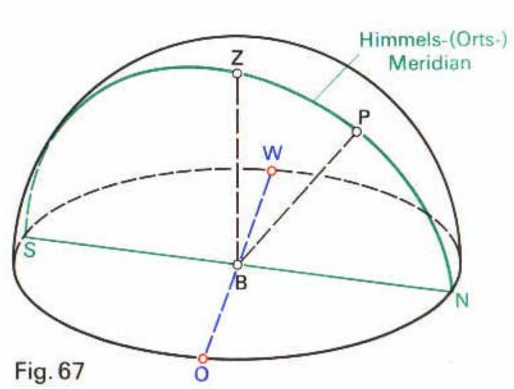


Fig. 67

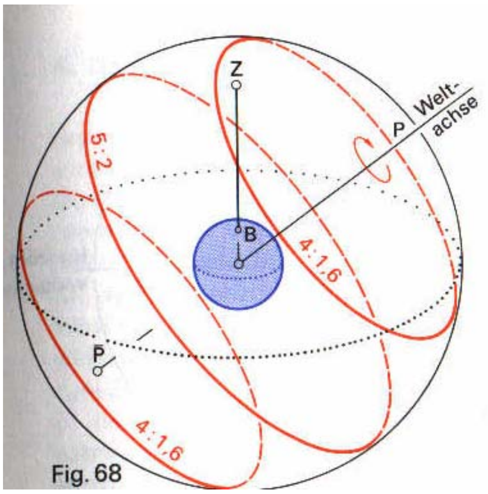


Fig. 68

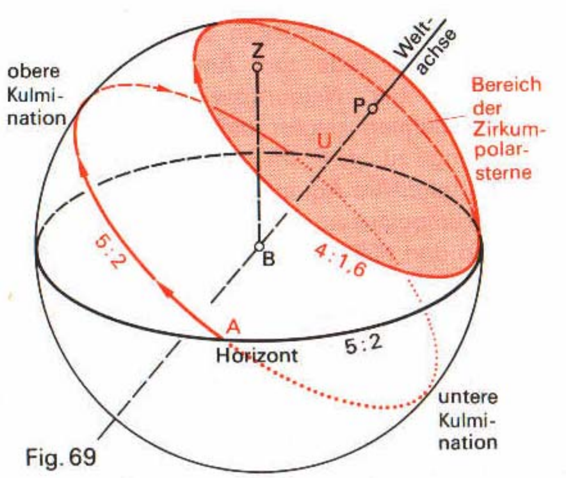


Fig. 69

Koordinatensysteme

Horizontsystem

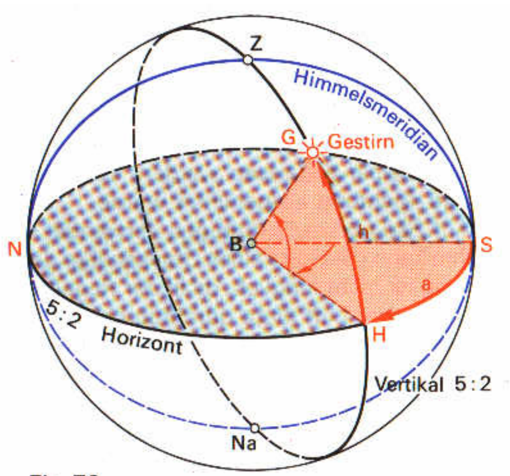


Fig. 73

Der Grundkreis liegt in der Ebene des Beobachters. Die Höhe auf der Himmelskugel wird in Grad gemessen. Der Horizont liegt auf 0°, der Zenit auf 90° und der Nadir auf –90°. Häufig wird anstelle der Höhe auch die Zenitdistanz verwendet, welche sich aus 90° weniger der Höhe ergibt. Als Nullpunkt wird der Südpunkt gewählt und von dort aus kann der zweite Positionswinkel, das Azimut, gemessen werden. Das Azimut ist der Winkel zwischen Himmelsmeridian und Vertikal des Gestirns. Man misst das Azimut in Richtung Westen von 0 bis 360°. Die Polhöhe an einem Ort ist gleich der geographischen Breite. Auf der Nordhalbkugel erleichtert der Polarstern die Messung. Der Vorteil des Horizontsystem ist, dass man die Höhe eines Objektes auch dann messen kann, wenn man den Horizont nicht genau bestimmen kann. Denn die Richtung zum Zenit stimmt mit der Richtung der Schwerkraft überein. Zwei früher sehr gebräuchliche Messinstrumente machen sich die Eigenschaften des Horizontsystems zu Nutze: der Theodolit und der Sextant.

Äquatorsystem

Da sich beim Horizontsystem den Koordinaten eines Sternes sich auf Grund der Erdrotation sich ständig ändern, gibt es auch noch das Äquatorsystem. Der Himmelsäquator dient als Grundkreis für dieses System. Die Höhe über den Äquator wird als Deklination bezeichnet, welche man vom Nordpol zum Südpol von 90° bis –90° zählt. Dazu gibt auch noch den Stundenwinkel, welcher vom Schnittpunkt des Äquators und Himmelsmeridians aus nach Westen von 0 bis 360° bzw. 0 bis 24h gezählt wird.

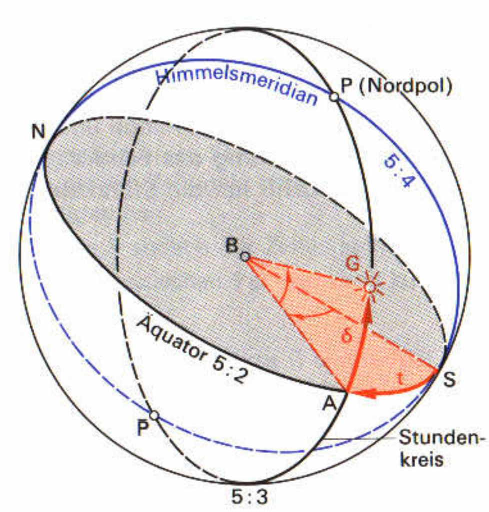


Fig. 78

Nautische Dreieck

Das Nautische Dreieck dient zur Umrechnung der beiden Systeme. Es ist eine Dreieck auf der Oberfläche der Himmelskugel mit den Ecken Pol, Zenit und Sternort. Durch Cosinus- und Sinussatz lassen sich folgende Formeln zur Umrechnung herleiten.

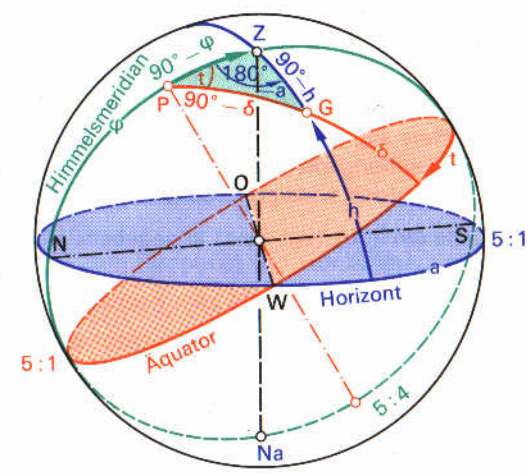


Fig. 81

$\sin(\delta) = \cos(z) * \sin(\varphi) – \sin(z) * \cos(\varphi) * \cos(a)$

$\sin(t) * \cos(\delta) = \sin(z) * \sin(a)$

Der Stern gegeben im Horizontsystem hat die Zenitdistanz z und das Azimut a. Im Äquatorsystem hat er die Deklination δ und den Stundenwinkel t. Der Winkel φ gibt den Breitengrad des Beobachters an.

Zeitmessung

Sonne als Zeitmesser

Auf Grund der Erdrotation bewegt sich die Sonne scheinbar innerhalb eines Tages einmal um die Erde. Die Erde bewegt sich pro Jahr einmal um die Sonne. Wenn man einen Sonnentag als den Zeitraum von einer Kulmination zur nächsten definiert, dann wird auch berücksichtig, dass durch die Bewegung der Erde sie sich etwas mehr drehen muss als eine volle Umdrehung um die passende Position zu erreichen. Ein Sterntag beginnt mit dem oberen Durchgang des Frühlingspunkt, welche fix am Firmament steht. Da der Erdumlauf dadurch nicht berücksichtig wird, hat einen Sterntag bloß 23h 56min und somit gibt es pro Jahr einen Sterntag mehr. Da man von der Erde aus den gleichen Anblick der Stern hat wie am Vortag nur 4min früher. Innerhalb eines Jahres durchläuft die Sonne von der erde aus betrachtet die Ekliptik. Dies ist der Schnittkreis von Himmelskugel und Erdbahnebene. Die Jahreszeiten entstehen durch die Neigung der Erdachse zur Bahnebene um 23° 27' Die Sonnenephemeride gibt die leichten Schwankungen der Koordinaten der Sonne an. Den kleinsten wert hat die Sonnendeklination bei der Wintersonnenwende und den größten bei der Sommersonnenwende. Bei der Tag- und Nachtgleiche geht die Sonne exakt im Westen auf und im Osten unter. Der Winkel Ostpunkt-Beobachter-Aufgangspunkt wird als Morgenweite bezeichnet und der Winkel Westpunkt-Beobachter-Untergangspunkt wird Abendweite genannt. Mittels des Nautischen Dreiecks Pol-Zenit-Untergangspunkt kann man die Länge eines Tages berechnen.

$$\mathrm{Cos}(t) = - \tan(\delta) * \tan(\varphi)$$

$$\mathrm{Cos}(a) = - \sin(\delta) / \cos(\varphi)$$

Aus der geografische Breite des Ortes φ und die Sonnendeklination δ können die Zeit des Sonnenuntergangs t von der Kulmination aus und der Ort des Sonnenuntergangs a vom Südpunkt aus berechnet werden. Bei der Zeitmessung wird ein Tag als Zeit zwischen zwei Kulminationen der Sonne angenommen. Doch da die Erdbahn kein Kreis ist und auf Grund weitere Faktoren kommt es daher zu nicht unerheblichen Schwankungen der „wahren Sonne“. Auf Grund der Neigung der Erdachse funktioniert auch eine Sonneuhr nicht. Um diese Nachteile der wahren Sonne auszugleichen verwendet man die mittlere Sonne als Rechengröße. Man nimmt dabei eine fiktive Sonne an die sich entlang des Äquators bewegt. Die wahre Ortszeit wird aus den Stundenwinkel der wahren Sonne weniger 12 Stunden. Die mittlere Ortszeit kann man aus dem Stundenwinkel der mittleren Sonne minus 12 Stunden berechnen. Als Zeitgleichung bezeichnet man die wahre Ortszeit minus der mittleren Ortszeit. Diese Differenz ist 4 mal Jahr Null und man kann ihre Werte aus einer Tabelle entnehmen. Da die Ortszeiten nur auf den selben Längenkreis gleich sind, ist die Differenz gestaffelt. Daraus ergeben sich die Internationalen Zeitzonen. Die Ortszeit am Nullmeridian wird als Greenwich Mean Time bezeichnet oder als Weltzeit. Den Längengrad auf den man sich befindet kann man durch eine Messung der Ortszeit ermitteln. Danach zieht man die Ortzeit von der Ortszeit in Greenwich ab und man den Längenkreis.

Sterne als Zeitmesser

Bei der Sternzeit ist 0 Uhr beim oberen Durchgang des Frühlingspunktes. Die Zeit wird dann durch den Stundenwinkel des Frühlingspunktes gemessen. Der Frühlingspunkt ist ein Fixpunkt am Firmament, jedoch befindet sich dort kein Stern für eine einfache Messung. Jedoch hat jeder Stern einen festen Winkel, welcher als Rektaszension bezeichnet wird, zum Frühlingspunkt. Die im Alltag ungebräuchliche Sternzeit ergibt sich aus der Summe des Stundenwinkels und der Rektaszension eines Sterns. Ein anderes Phänomen, mit dem man an Hand von Sternen Zeiträume messen kann, ist die Präzession. Auf Grund der Kreiselbewegung der Erdachse wandert der Frühlingspunkt um ca. 50“ pro Jahr. Innerhalb eines Platonischen Jahres, dass sind ca. 26000 Jahre, durchwandert er die Ekliptik.

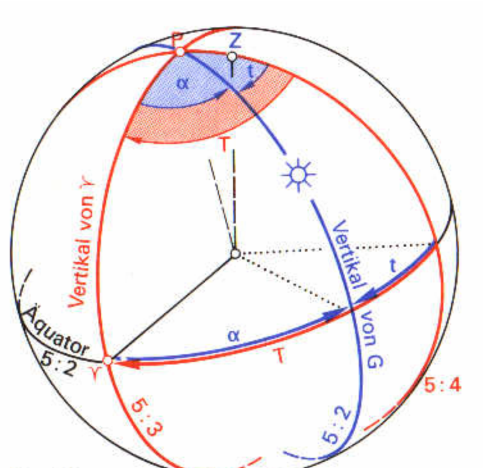


Fig. 92