Nichteuklidische Geometrie 2: sphärische Geometrie

PROSEMINAR BEISPIELE GEOMETRISCHER STRUKTUREN

DOZENT: DOKTOR MORITZ WEBER

REFERENTIN: JOHANNA FROMM

DATUM: 24.11.2020

Inhaltsverzeichnis

Definition

- Andere Bezeichnung: Kugelgeometrie
- Modell für elliptische Geometrie
- Befassung mit Punkten und Punktmengen auf Kugel
- Kugel = Menge aller Punkte im dreidimensionalen, euklidischen Raum, die von einem festen Mittelpunkt M den selben Abstand R haben

Standardkugelgleichung mit Mittelpunkt M = (m, n, o) und Radius R:

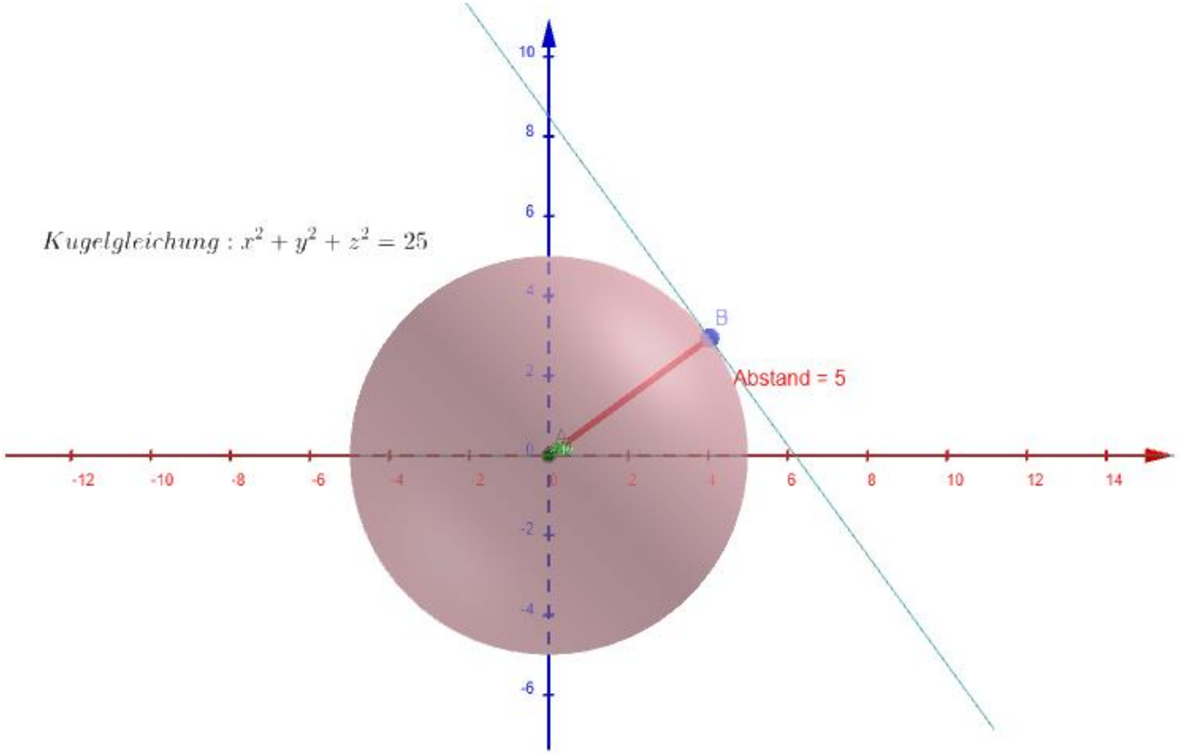
$$(x-m)^2+(y-n)^2+(z-o)^2=R^2$$

Grundlagen

- Befassung mit nicht-euklidischer Geometrie erst seit dem 19. Jahrhundert
- Unerfolgreicher Versuch des Beweises des Parallelenaxioms → Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie
- Übertragung vieler Begriffe der euklidischen Geometrie in die sphärische Geometrie möglich

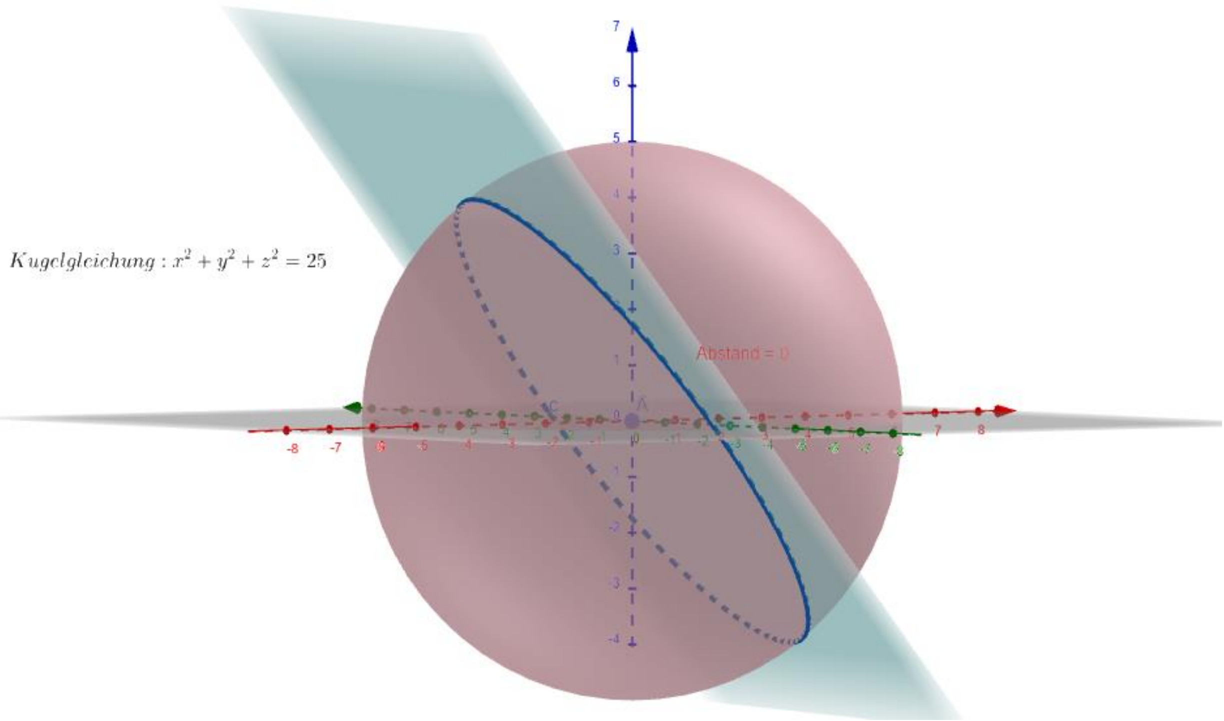
Grundbegriffe

Punkt = Schnitt von Kugel und Ebene mit Abstand d=R zum Mittelpunkt

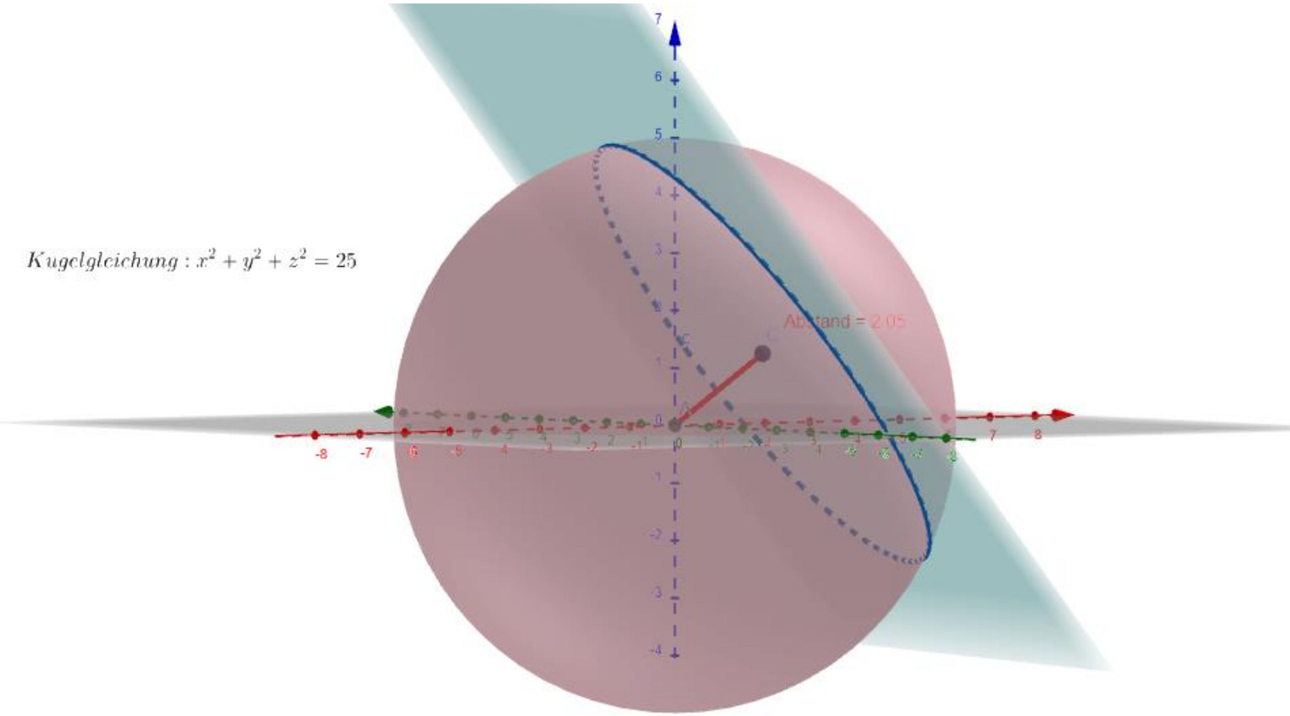


Kreis = Schnitt von Kugel und Ebene mit Abstand 0≤d<R zum Mittelpunkt:

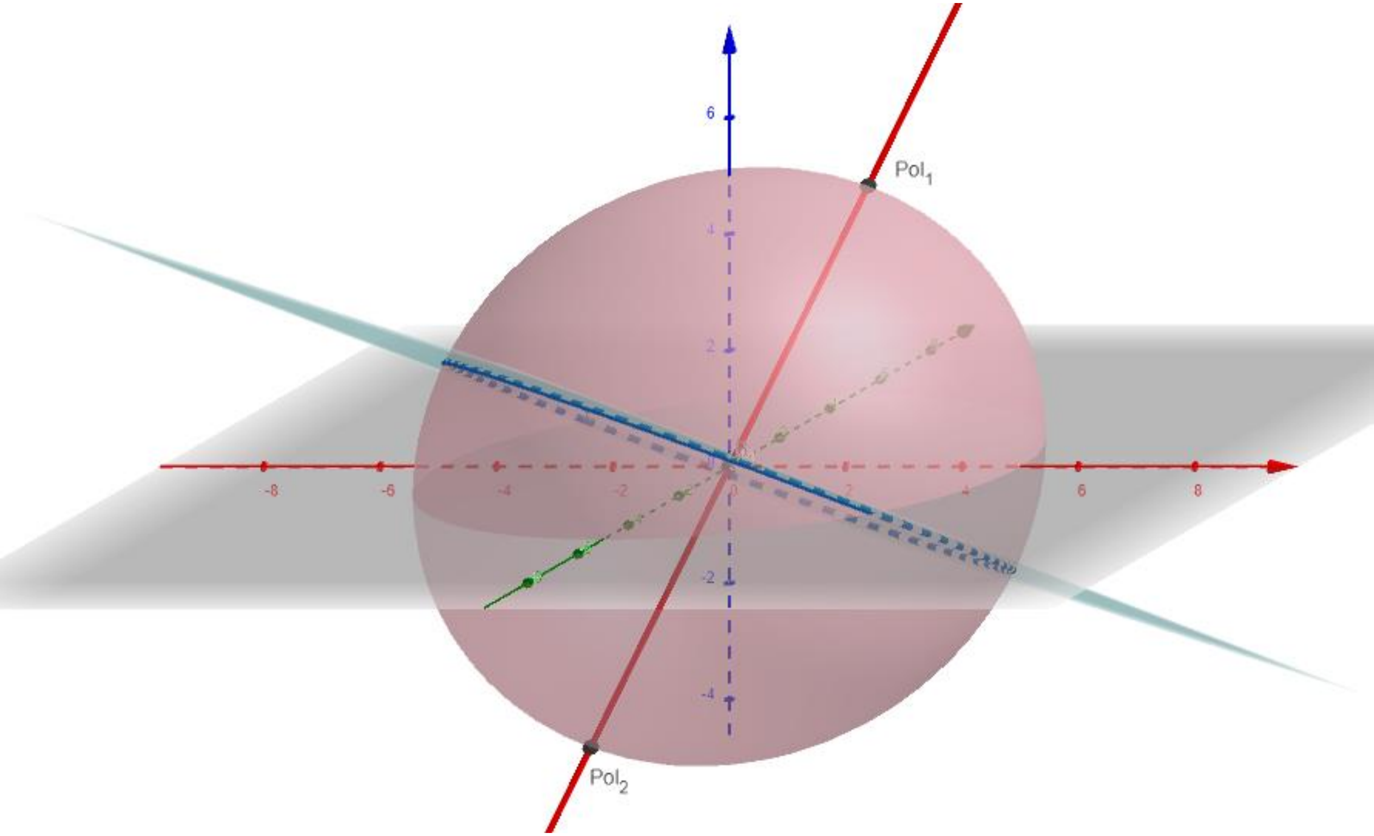
Großkreis = Ebene mit Abstand d=0 zum Mittelpunkt



Kleinkreis = Ebene mit Abstand d<R zum Mittelpunkt



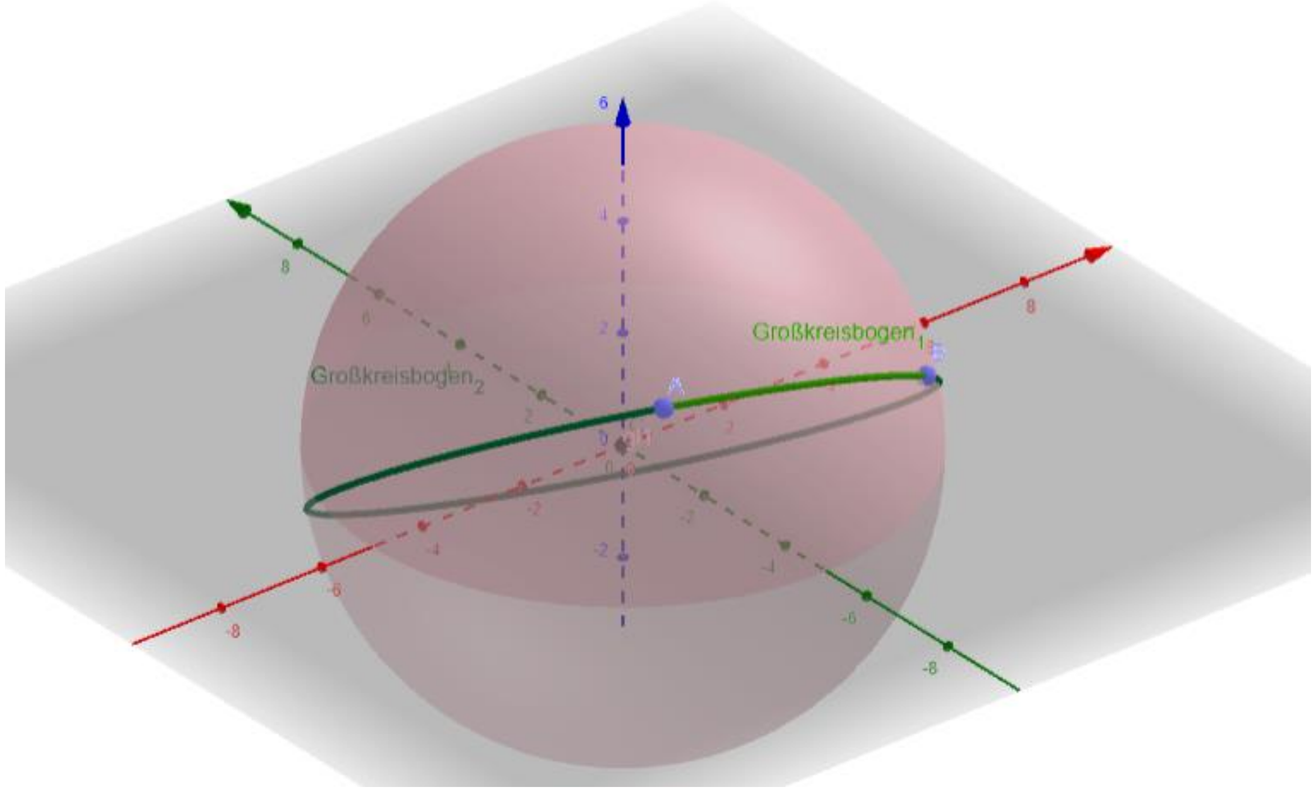
Senkrechte auf Großkreisebene durch Mittelpunkt M schneidet Kugel K in zwei Punkten → Pole



Großkreisbogen = Kreissektor des Großkreises zwischen zwei Punkten A und B

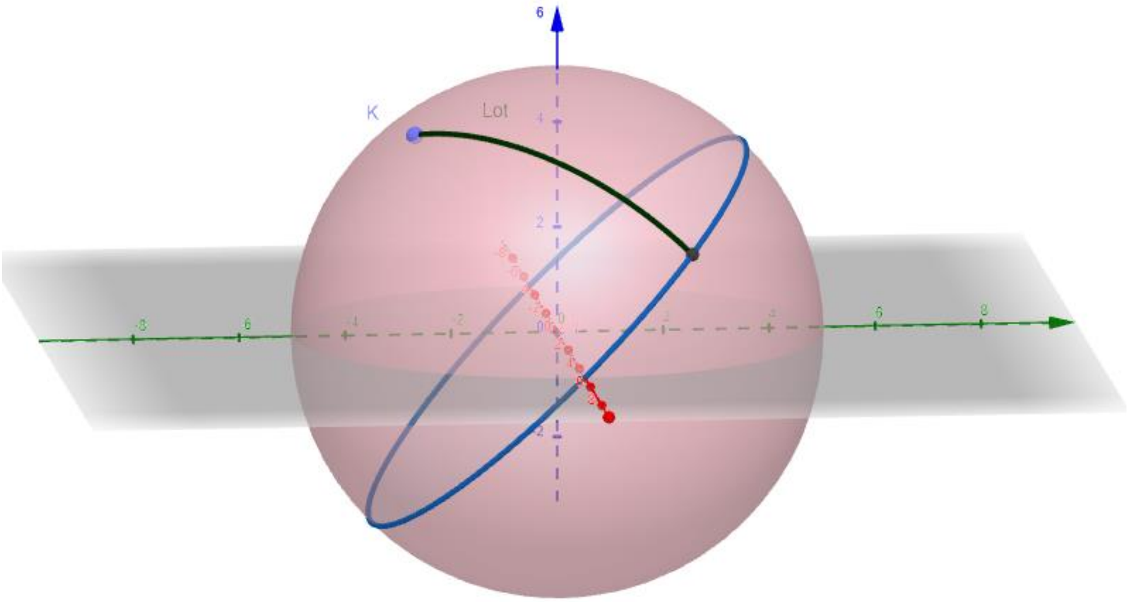
→ Sphärischer Abstand = Kürzerer der beiden Großkreisbögen

$$\mathrm{d} = \measuredangle AMB \; * R$$



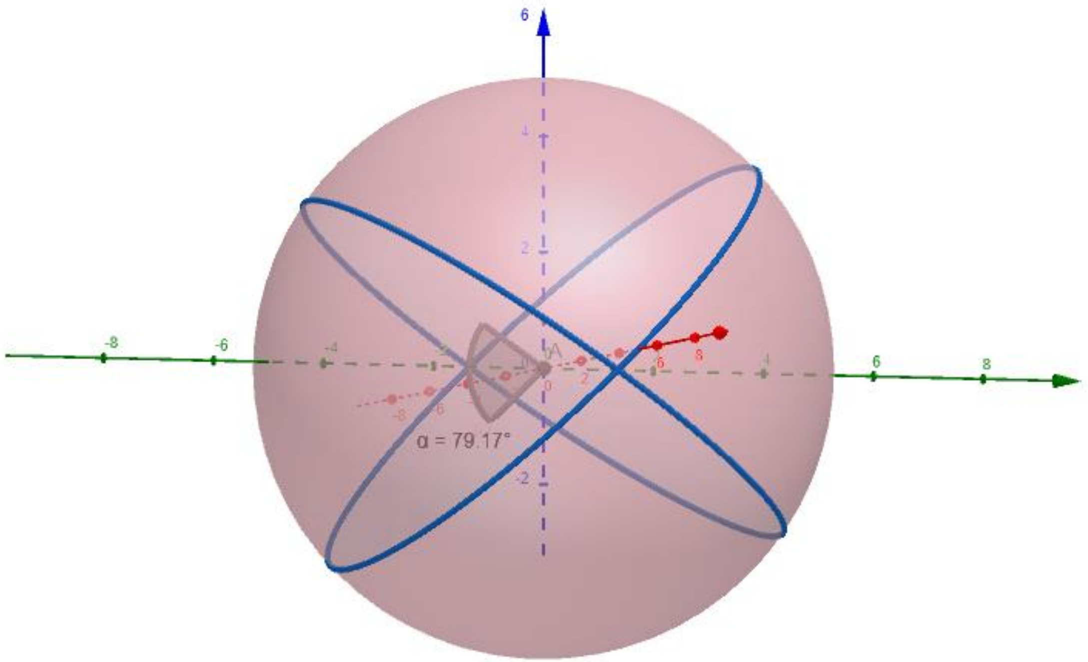
Sphärischer Abstand von Punkt P zum Großkreis K = Länge des sphärischen Abstandes des Lotes von P auf K

→ Eindeutig bestimmbar



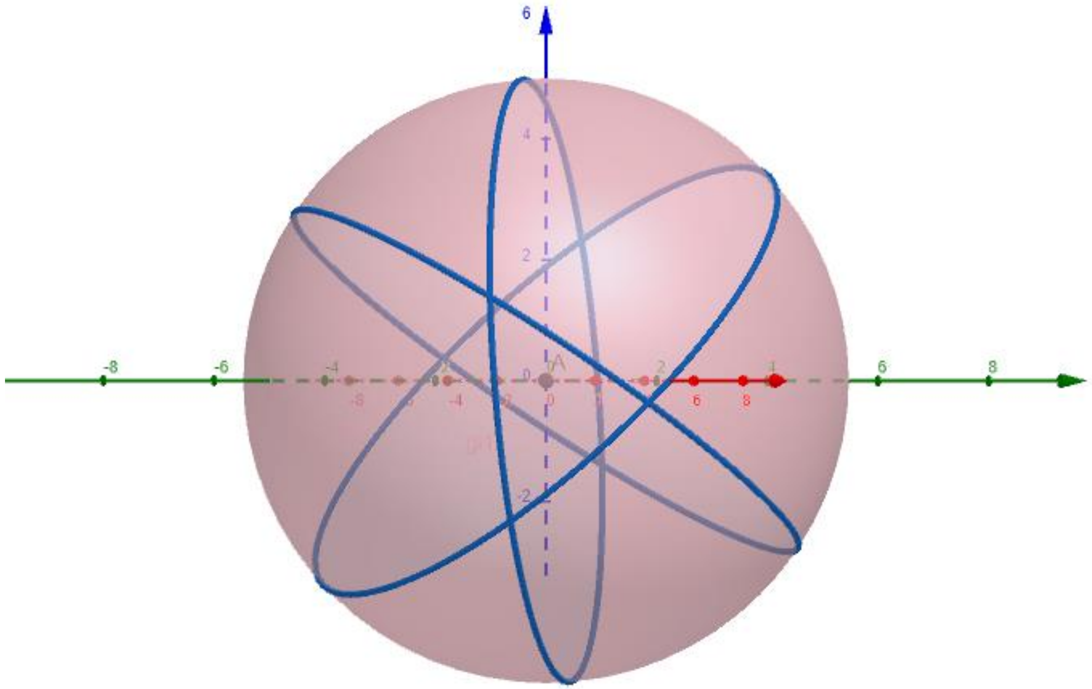
Kugelzweieck = Gebiet zwischen zwei verschiedenen Großkreisen

Winkel des Kugelzweiecks = Scheitelwinkel der Schnittebenen, die die Großkreise bilden



Kugeldreieck = Gebiet zwischen drei Großkreisen

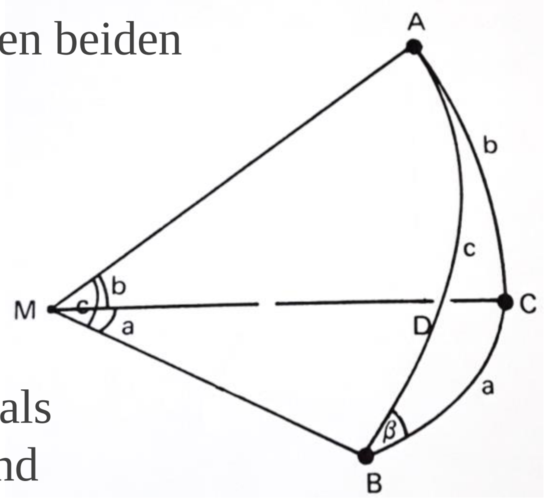
→ Drei Großkreise bilden acht Kugeldreiecke, davon sind jeweils zwei Dreiecke zentralsymmetrisch/ kongruent zueinander.



- Darstellung der Seitenlängen eines Kugeldreiecks durch Zentriwinkel zwischen den beiden angrenzenden Punkten

  z.B.:

$$b = \measuredangle AMC$$



- <u>Eulersches Kugeldreieck</u> : Kugeldreieck, in dem alle Dreieckswinkel kleiner als 180° und alle Seitenlängen kleiner als $R * 180°$ sind

Vergleich zu euklidischer Geometrie

Euklidische Geometrie	**sphärische Geometrie**
Punkt	Punkt
Gerade	Großkreis
Strecke	Großkreisbogen
Abstand	Kürzerer Großkreisbogen
Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$	Sinussatz: $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$
Dreiecksumfang: $U = a + b + c$	Dreiecksumfang: $U = a + b + c$ mit $0° < a + b + c < 360°$
Winkelsummensatz: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$	Winkelsummensatz: $180° < \alpha + \beta + \gamma \leq 540°$
<u>Axiome</u>: Inzidenz-, Anordnungs-, Kongruenz-, Parallelen-, Vollständigkeitsaxiome	<u>Axiome</u>: Inzidenz-, Anordnungs-, Kongruenz-, Vollständigkeitsaxiome

Beweis Seitensumme Eulersches Dreieck: $0° < a + b + c < 360°$

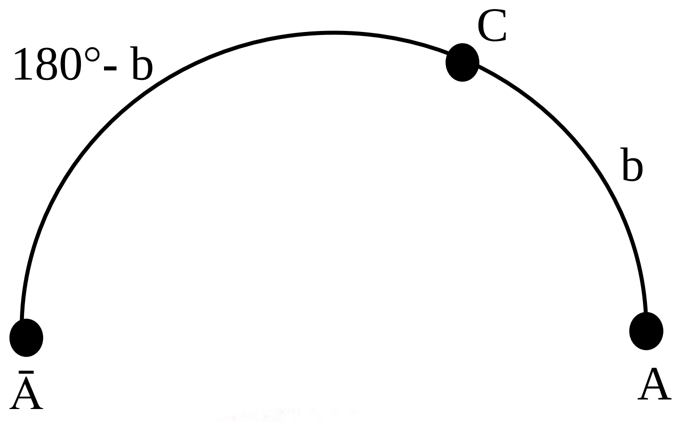
$\overline{CB} = a$ per Definition kürzeste Strecke zwischen B und C

$\Rightarrow |C\bar{A}| + |\bar{A}B| > a$

mit $|C\bar{A}| = 180° - b$ und $|\bar{A}B| = 180° - c$ folgt:

$180° - b + 180° - c > a$

$\Leftrightarrow a + b + c < 360°$

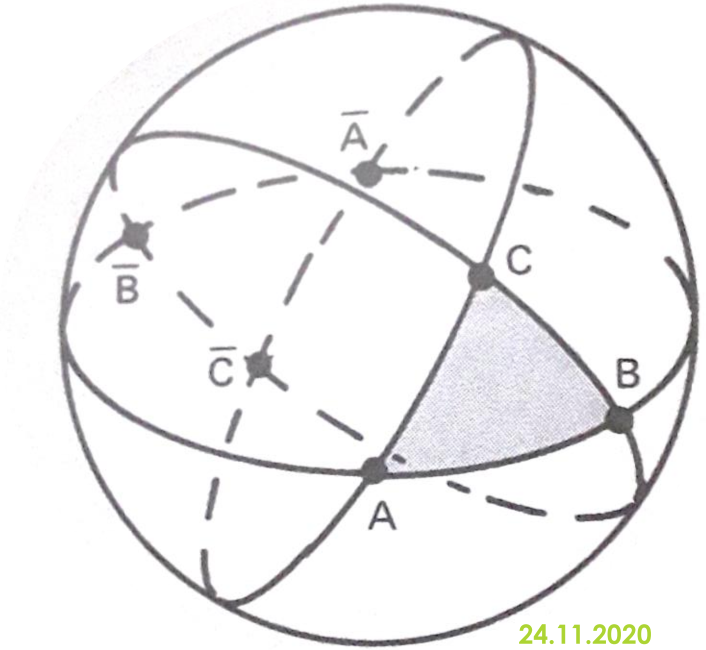


Beweis Winkelsumme Eulersches Dreieck: $180° < \alpha + \beta + \gamma \leq 540°$

analog zu Beweis Seitensumme gilt:

$0° < 180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma \leq 360°$

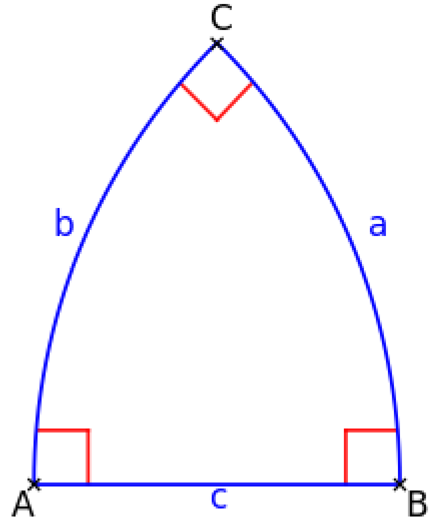
$\Leftrightarrow 180° < \alpha + \beta + \gamma \leq 540°$



Axiomatik der sphärischen Geometrie

- Gültigkeit der Axiome aus euklidischer Geometrie bis auf Parallelenaxiom
- Ergänzung durch **Elliptisches Parallelenaxiom**: „ Es existieren drei verschiedene Geraden a, b, c, die paarweise orthogonal sind.“ ⇔ Es existiert ein Dreieck mit drei rechten Winkeln, das **Polardreiseit**.
- Aufhebung vieler Sätze der euklidischen in der sphärischen Geometrie, z.B. keine Gültigkeit des Satz des Pythagoras

Beweis: Sei $a=b=c$.
Dann gilt nach Pythagoras:
$a^2 = a^2 + a^2$ ↯ Widerspruch



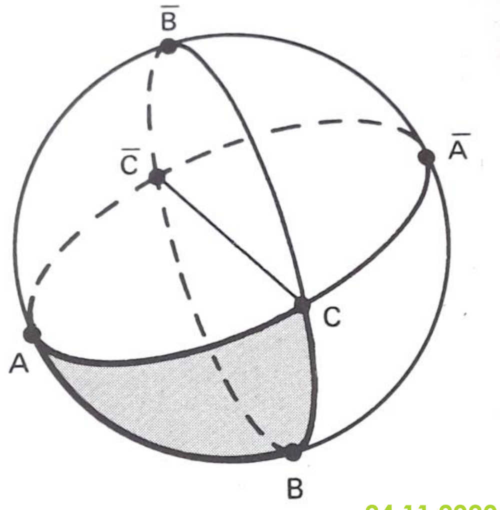
→ Annahme: Axiome ⇒ Parallelenaxiom ➔ alle Sätze der euklidischen Geometrie gelten

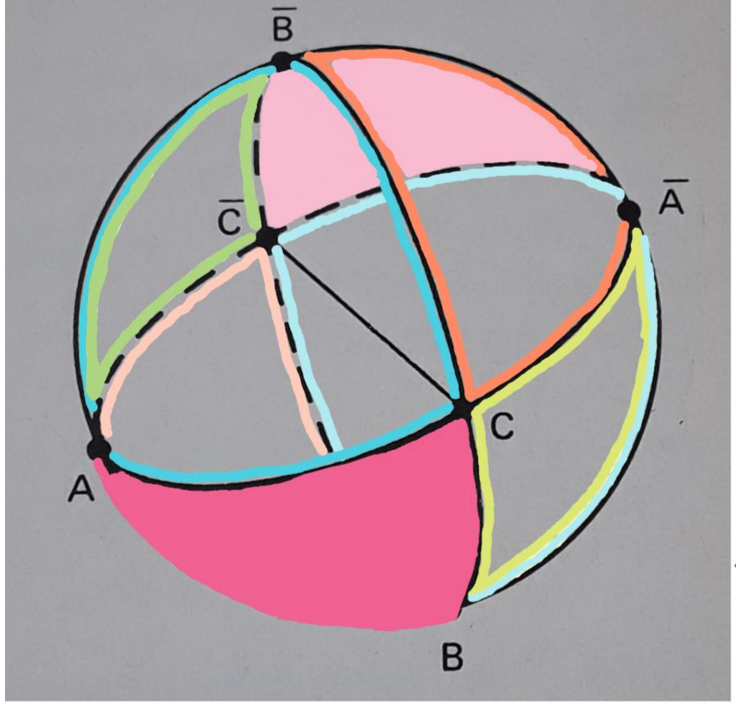
nicht alle Sätze gelten ➔ Axiome ⇏ Parallelenaxiom

→ Beweis, dass euklidisches Parallelenaxiom sich nicht aus übrigen Axiomen herleiten lässt

Flächenberechnung

- Zweiecksfläche: $A_Z = \frac{\pi * R^2}{90°} * \delta°$ mit $\delta°$ = Winkel des Kugelzweiecks
- Dreiecksfläche: $A_\Delta = \frac{\pi * R^2}{180°} * \varepsilon°$ mit $\varepsilon° = \alpha° + \beta° + \gamma° - 180°$ und α, β, γ Winkel des Kugeldreiecks





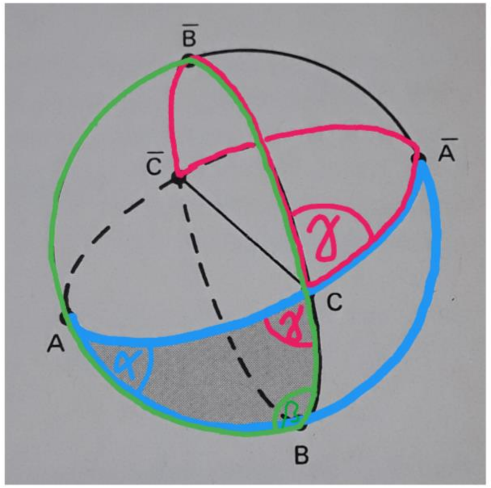
Kongruenz:

$\triangle ABC$ und $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
$\triangle \bar{A}BC$ und $\triangle A\bar{B}\bar{C}$
$\triangle \bar{A}\bar{B}C$ und $\triangle AB\bar{C}$
$\triangle A\bar{B}C$ und $\triangle \bar{A}B\bar{C}$

$$\Rightarrow A_{\triangle ABC} + A_{\triangle \bar{A}BC} + A_{\triangle \bar{A}\bar{B}C} + A_{\triangle A\bar{B}C} = 2\pi R^2 \left(\begin{matrix}\text{Flächeninhalt}\\ \text{Halbkugel}\end{matrix}\right)$$

$\triangle \bar{A}BC, \triangle \bar{A}\bar{B}C, \triangle A\bar{B}C$ bilden mit
$\triangle ABC, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \triangle ABC$ drei Kugelzweiecke
mit Winkeln α, γ und β

Fläche Kugelzweieck: $\frac{A_z}{4\pi R^2} = \frac{\delta}{360°} \Leftrightarrow A_z = \frac{\pi R^2}{90°}\delta$



Daraus folgt:
$$A_{\triangle \bar{A}BC} + A_{\triangle ABC} = \frac{\pi R^2}{90°}\cdot\alpha$$
$$A_{\triangle \bar{A}\bar{B}C} + A_{\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}} = \frac{\pi R^2}{90°}\cdot\gamma$$
$$A_{\triangle A\bar{B}C} + A_{\triangle ABC} = \frac{\pi R^2}{90°}\cdot\beta$$

mit $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \triangle ABC$ folgt:

$$A_{\triangle ABC} + \frac{\pi R^2}{90°}(\alpha+\beta+\gamma) - 3\cdot A_{\triangle ABC} = 2\pi R^2$$
$$\Leftrightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{\pi R^2}{180°}(\alpha+\beta+\gamma) - \pi R^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad = \frac{\pi R^2}{180°}(\alpha+\beta+\gamma-180°)$$
$$\Leftrightarrow \qquad = \frac{\pi R^2}{180°}\cdot\varepsilon° \text{ mit } \varepsilon° = \alpha°+\beta°+\gamma°-180°$$

Kongruenz und Dualität

- Kongruenz:
  - SSS
  - SWS
  - SSW (entsprechende Gegenwinkel müssen beide spitze, stumpfe oder rechte Winkel sein)
  - WWW
  - WSW
  - WWS (entsprechende Gegenwinkel müssen beide spitze, stumpfe oder rechte Winkel sein)

- Dualität (Ableitung von Eigenschaften geometrischer Körper aus anderen Körpern):
  - SSS und WWW
  - SWS und WSW
  - SSW und SWW (nicht eindeutig)

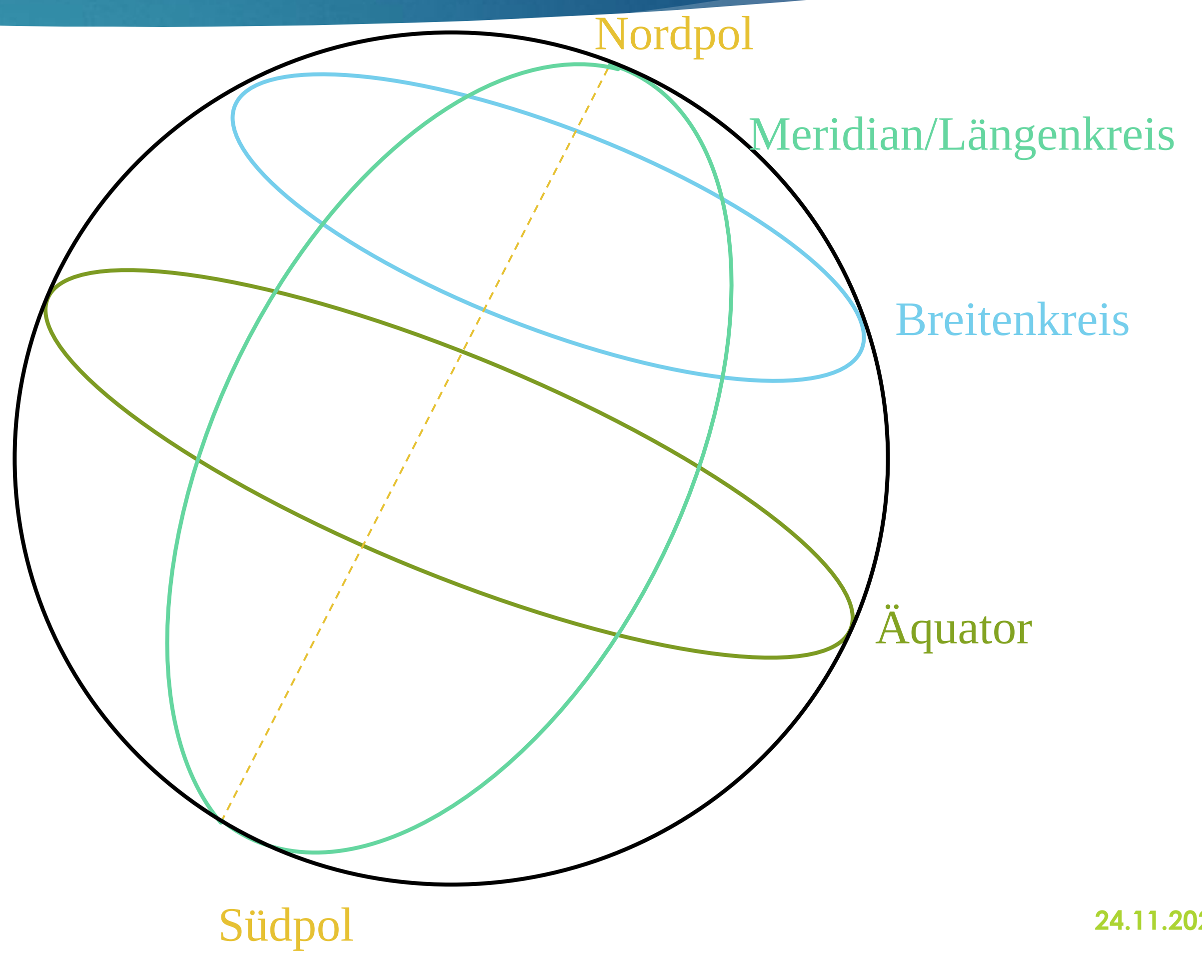
  → Vertauschen von Winkel und Seitenlänge führt zu Dualität

Anwendung

- Gradnetz der Erde:
  - Äquator = Großkreis
  - Meridian/Längenkreis = Großkreis durch Polare des Äquators
  - Breitenkreis = paralleler Kleinkreis zum Äquator

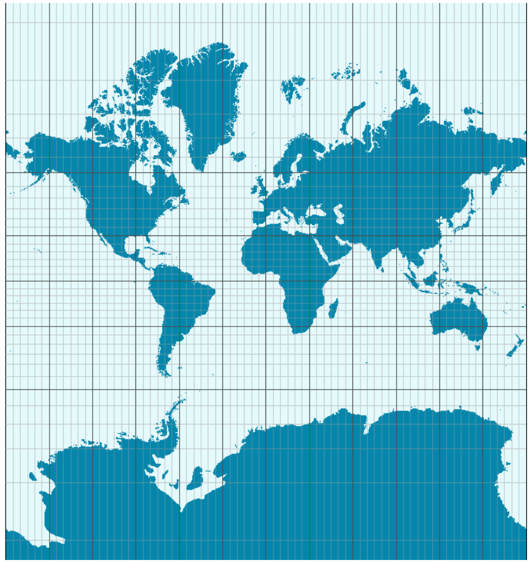
→ Koordinatensystem mit orthogonalen Längen- und Breitenkreisen

→ Geografische Ortsbestimmung



- Koordinaten:
  - Zählung der Breitengrade vom Äquator aus Richtung Norden und Süden
  - Zählung der Längengrade von festgelegtem Nullmeridian Richtung Westen und Osten
  - Winkel entgegengesetzt zum üblichen Koordinatensystem

  Bsp.: Saarbrücken: 49° N , 7° O



- Teilweise Verlust von Winkel- und Längentreue bei Übertragung von dreidimensionalen Kugelkoordinaten in zweidimensionale Karten

→ Beibehaltung durch Anwendung verschiedener Projektionen

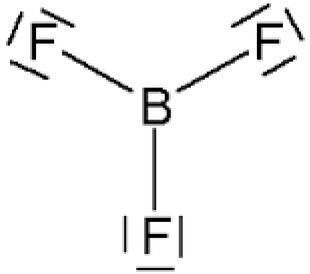
  z.B. Mercator-Projektion: Erhaltung der Winkeltreue unter Verlust der Längentreue

- Anwendung bei Luftfahrt, Nautik, Vermessungen auf Erdoberfläche

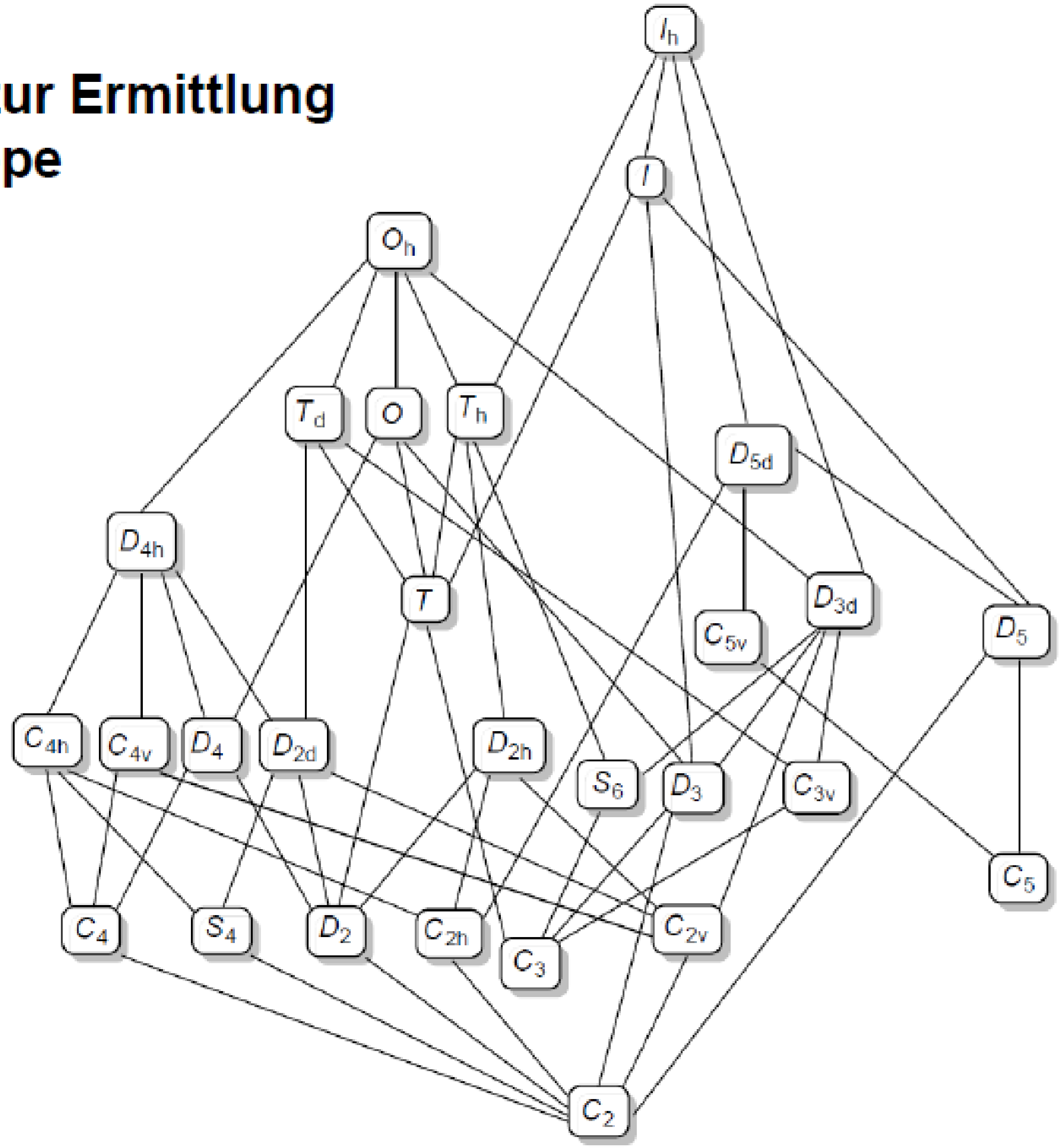
- Punktgruppen:
  - Isometrie der Kugel: Kugel bildet durch bijektive Abbildung Kreisdreieck auf kongruentem Kreisdreieck ab
  - → Figuren kongruent, wenn sie durch Symmetrieoperationen ineinander überführbar sind

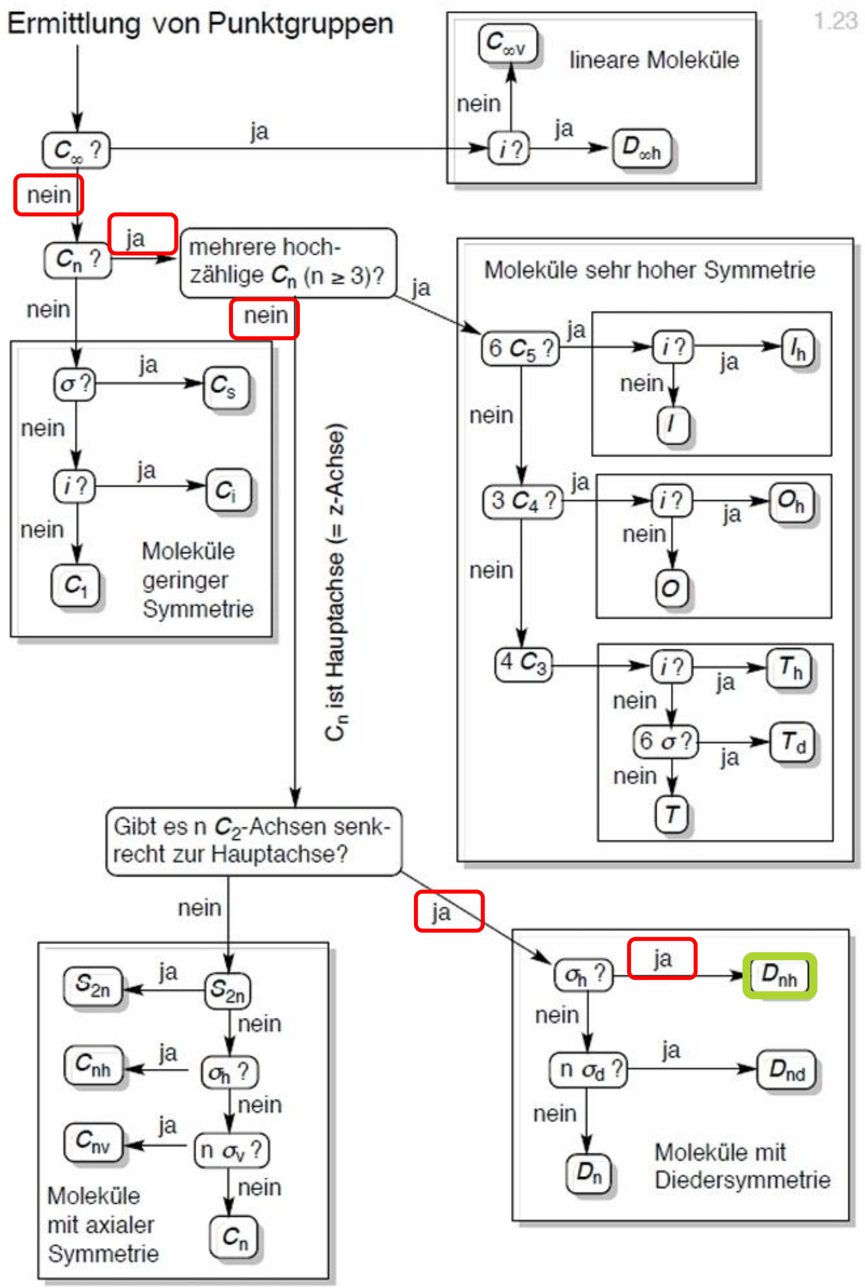
  Symmetrieoperationen: Identität, Drehung, Inversion, Spiegelung, Drehspiegelung

  - → Kugelisometrie bildet Gruppe
  - Entwicklung der Punktgruppe zur Beschreibung der Symmetrie endlicher Körper → Anwendung in der Chemie: Kristallgeometrie (Symmetrie einer Kristallstruktur bzw. eines Moleküls)



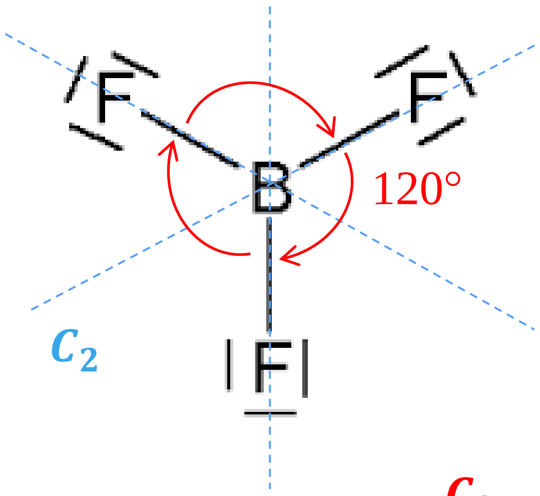
Fließschema zur Ermittlung der Punktgruppe



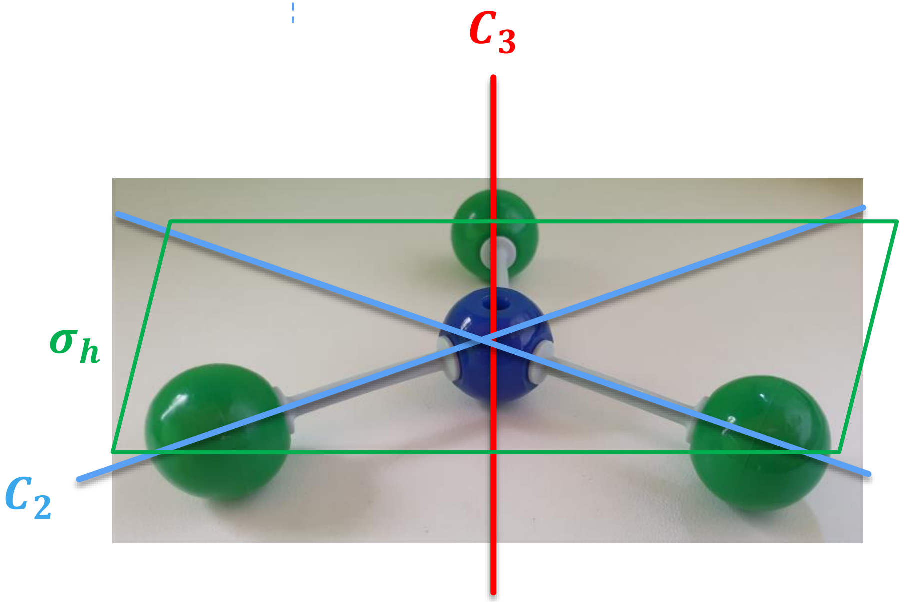


Ermittlung von Punktgruppen
1.23
$C_{\infty v}$
lineare Moleküle
nein
ja
C_∞ ?
i ?
$D_{\infty h}$
nein
ja
C_n ?
mehrere hoch-zählige C_n ($n \geq 3$)?
nein
Moleküle sehr hoher Symmetrie
6 C_5 ?
I_h
I
3 C_4 ?
O_h
O
4 C_3 ?
T_h
6 σ ?
T_d
T
σ ?
C_s
C_i
C_1
Moleküle geringer Symmetrie
C_n ist Hauptachse (= z-Achse)
Gibt es n C_2-Achsen senkrecht zur Hauptachse?
S_{2n}
C_{nh}
σ_h ?
C_{nv}
n σ_v ?
C_n
Moleküle mit axialer Symmetrie
D_{nh}
n σ_d ?
D_{nd}
D_n
Moleküle mit Diedersymmetrie

D_{3h}



B
F
120°
C_2



C_3
σ_h
C_2

- Astronomie:
  - Darstellung von Himmelskörpern in Karten durch Verwendung zweier geozentrischer Koordinatennetze übereinander → äquatoriales Koordinatensystem
  - Angabe der Position durch Polarkoordinaten von ausgewählter Bezugsebene aus
  - Koordinatenursprung z.B. Erdmittelpunkt, Beobachter auf Erdoberfläche, Sonne
  - Bestimmung der Koordinaten der Sonne als Grundlage für Zeitrechnung
  - → Ansätze der sphärischen Geometrie bereits sehr lange erkennbar

→ Sphärische Geometrie bildet wichtige Grundlage zahlreicher Anwendungsbereiche

Quellen

Bigalke, Hans-Günther. (1984). *Kugelgeometrie*. Frankfurt am Main: Otto Salle.

Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. (1932). *Anschauliche Geometrie*. Heidelberg: Springer.

Skript: Allgemeine Chemie 04, Dominic Munz, SS20

https://stackoverflow.com/questions/15584170/draw-sphere-on-timage-control-of-delphi

https://de.wikipedia.org/wiki/Elliptische_Geometrie#cite_ref-3

https://de.wikipedia.org/wiki/Mercator-Projektion

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit !