Sphärische Geometrie im Schulunterricht

Diplomarbeit
im Lehramtsstudium Mathematik - Geschichte
zur Erlangung des akademischen Grades
Magister der Naturwissenschaften

eingereicht an der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
der Universität Innsbruck

von

Franz David Gänsluckner

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer

Innsbruck, Dezember 2019

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher weder in gleicher noch in ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Unterschrift: .....

Innsbruck, am: .....

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich während meines Studiums unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Univ. Prof. Dr. Tim Netzer, der meine Diplomarbeit betreut und begutachtet hat. Für die Bereitstellung des Themas sowie für die unkomplizierte und effiziente Betreuung möchte ich mich herzlich bedanken. Außerdem hat er sich immer ausreichend Zeit genommen, um mir bei inhaltlichen Problemen zu helfen.

Ebenfalls möchte ich mich bei all meinen Kommilitonen und Kommilitoninnen bedanken, die mir während des Studiums freundlich ihre Unterlagen zur Verfügung gestellt haben. Ohne die fruchtbare Zusammenarbeit hätte ich die anfänglichen Proseminare wahrscheinlich nie positiv bestanden.

Des Weiteren möchte ich allen Korrekturlesern und Korrekturleserinnen recht herzlich danken.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, vor allem meinen Eltern für ihre unendliche Geduld und für ihre Großzügigkeit. Ohne eure umfassende Unterstützung wäre all das nicht möglich gewesen.

Abschließend möchte ich noch meiner Freundin "Danke" sagen, die mich in den letzten Studienjahren geduldig als Mitbewohner ertrug und trotzdem noch ertragen will. Danke für alles!

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **2**

I. Grundlagen **5**

2. Schreibweisen und grundlegende Konzepte **5**
2.1. Mengen 5
2.2. Funktionen 6
2.3. Intervalle 6
2.4. Aussagenlogik 7
2.5. Der direkte Beweis 8

3. Trigonometrische Funktionen und der Einheitskreis **9**

4. Matrizen und Determinanten **14**

5. Vektorprodukt **23**

6. Skalarprodukt **28**

7. Vier Hilfssätze **32**
7.1. Lemma 1 32
7.2. Lemma 2 33
7.3. Lemma 3 34
7.4. Lemma 4 37

8. Normen **39**
8.1. Betragsfunktion 39
8.2. Definition und Beispiele 39
8.3. Cauchy - Schwarz - Ungleichung 41
8.4. Euklidische Norm 43

9. Fußpunkt des Lotes **48**

10. Kosinus und Skalarprodukt **50**

11. Sinus und Kreuzprodukt **53**

II. Sphärische Geometrie **55**

12. Metrischer Raum **55**

13. Die Einheitssphäre **56**

14. Sphärische Abstand **57**

15. Der Sphärische Raum **59**
15.1. M1 60
15.2. M2 62
15.3. M3 62

16. Großkreise **66**

17. Das sphärische Dreieck **69**

18. Winkelsumme im sphärischen Dreieck **71**
18.1. Winkellemma 73
18.2. Winkelsumme 76
18.3. Beschränktheit der Winkelsumme 79

19. Das Polardreieck **80**
19.1. Großkreis und Pol 80
19.2. Definition des Polardreiecks 82
19.3. Eigenschaften eines Polardreiecks 83

III. Sphärische Trigonometrie **91**

20. Seitenkosinussatz der sphärischen Geometrie **91**

21. Winkelkosinussatz der sphärischen Geometrie **95**

22. Sinussatz der sphärischen Geometrie **97**

23. Rechtwinkliges Kugeldreieck **102**
23.1. Neper'sche Formeln 102

24. Spezialfälle **109**
24.1. Rechtwinkliges Dreieck 109
24.2. Rechtseitiges Dreieck 109
24.3. Doppelrechtwinkliges - gleichschenkliges Kugeldreieck 110
24.4. Kugeloktant 112

25. Zusammenfassung **113**

IV. Schulbezug **116**

26. IBL **116**

27. Lehrplanbezug **117**
27.1. Inhalt 117
27.2. Didaktische Grundsätze 118

28. Unterrichtskonzept **119**
28.1. Kontextüberlegungen 119
28.2. Erste Unterrichtsstunde 122
28.3. Zweite Unterrichtsstunde 125
28.4. Dritte Unterrichtsstunde 129

Abbildungsverzeichnis **134**

Literatur **135**

»Was ist das?«

»Sphärische Trigonometrie [...] Sauschwer. Keinen Dunst. [...]«

- aus: "Der Schüler Gerber"
von Friedrich Torberg

1. Einleitung

Kurt Gerber und sein Freund hatten bei der mündlichen Reifeprüfung ihres Schulkameraden anscheinend nur bedingt eine Idee, was sich an der Tafel abspielte. Wahrscheinlich lässt sich diese Unwissenheit auf den autoritären Unterrichtsstil ihres gefürchteten Mathematiklehrers "Gott" Kupfer zurückführen. Wer mit dem vorgegebenen Tempo nicht mithalten konnte, wurde ausgesiebt. Der dadurch entstandene Druck war womöglich einer der Gründe für Schüler Gerbers Freitod.
Natürlich handelt es sich bei dieser Geschichte nur um einen Roman, dessen Handlung von fiktiver Natur ist. Dennoch spiegelte dieser den Zeitgeist sowie die Atmosphäre in den damaligen Klassenzimmern wider. Ob womöglich aufgrund dessen die Überlegung folgte, dieses Thema aus dem österreichischen Lehrplan zu entfernen, bleibt dahingestellt. In jedem Fall hätte die sphärische Geometrie durchaus ihre Berechtigung auf eine Behandlung im Schulunterricht, da sie vor allem aufgrund ihrer Geschichte eine glaubwürdige Motivation bietet. Im Laufe der Jahrhunderte lernten die Menschen, die Inhalte der sphärischen Geometrie für die Vermessung der Erde zu verwenden.
In der Antike entwickelten die Ptolemäer in Ägypten schon eine Methode, mit welcher sich der Umfang der Erde gut schätzen ließ. Dazu beobachteten sie Schattenbildungen in Alexandria und in Syene und konnten mithilfe der bekannten Entfernung dieser beiden Orte einen Erdumfang bestimmen.
Weiters benötigte man zur Zeit der Entdecker und Seefahrer ein verlässliches Verfahren, das die Berechnung von Entfernungen ermöglichen sollte. Dazu bediente man sich bei den mathematischen Entdeckungen der Griechen und formulierte auf Grundlage dieses antiken Wissens die Idee, imaginäre Kugeldreiecke auf den Globus zu legen und deren Seiten und folglich Entfernungen zu berechnen.
Das uns bekannte Wissen über die sphärische Geometrie basiert auf der Sehnsucht nach Neuem, auf dem Entdeckergeist des Menschen. Aus dieser ihm zu eigenen Motivation resultiert das mathematische Teilgebiet der sphärischen Geometrie. Dessen historische Entwicklung verdeutlicht seine Bedeutung im Alltag und legitimiert des Weiteren seinen Einsatz im Schulunterricht.
Besonders in der Schule benötigt man als Mathematiklehrer die Fähigkeit, die Schüler und Schülerinnen motivieren zu können. So habe ich mir das Ziel gesetzt, dieses geometrische Teilgebiet im Rahmen meiner Diplomarbeit möglichst nachvollziehbar und leicht verständlich zu präsentieren.
Der Schüler Gerber hätte sich darüber vielleicht gefreut.....

Aufbau

Im Großen und Ganzen wird die Arbeit in vier Hauptteile gegliedert.

Im ersten Teil "Grundlagen" wird das nötige Vorwissen für die anschließenden Teile erarbeitet. Dazu zählt neben einer Definition der Winkelfunktionen über den Einheitskreis eine Einführung in die Inhalte der Linearen Algebra. Insbesondere wird auf das Zusammenspiel von Standardskalarprodukt, Kreuzprodukt und euklidischer Norm ein-

gegangen. Dadurch können wir mithilfe des Fußpunkts des Lotes schon grundlegende Resultate der sphärischen Geometrie vorbereiten. Weiters werden zu Beginn des Teils die verwendeten Schreibweisen geklärt.

Der Teil "Sphärische Geometrie" verfolgt das Ziel, eine ordentliche Definition des sphärischen Dreiecks zu ermöglichen. Dazu wird anfangs das Konzept des metrischen Raumes erläutert, in dessen Rahmen der sphärische Raum eingeführt wird. Anschließend werden jene geometrischen Objekte des sphärischen Raumes definiert, welche für die Definition des allgemeinen Kugeldreiecks benötigt werden. Abschließend werden einige Eigenschaften von Kugeldreiecken in der Form von Sätzen beschrieben und bewiesen.

Im Teil "Sphärische Trigonometrie" widmen wir uns gänzlich der Berechnung von Kugeldreiecken. Dieser Teil wird nach den möglichen Fällen von gegebenen Größen eines Kugeldreiecks aufgebaut. Dabei werden alle möglichen Szenarien mit jeweils einem Lösungsvorschlag schrittweise vorgestellt. Die Sätze, die für die Lösungen nötig sind, werden logisch in den Aufbau eingegliedert und bewiesen. Sie sind außerdem titelgebend für die Teilüberschriften, um die Orientierung zu erleichtern. Abschließend werden die unterschiedlichen Fälle samt Lösungsvorschläge im Rahmen einer kritischen Zusammenfassung übersichtlich aufgelistet.

Der vierte und letzte Teil "Schulbezug" soll einen der populärsten Anwendungsbereiche der sphärischen Trigonometrie im Rahmen eines pädagogischen Konzeptes vorstellen und die Diplomarbeit somit abrunden. Zu Beginn wird eine vielversprechende Unterrichtsmethode vorgestellt, welche dann auch im Unterrichtskonzept zu tragen kommt. Nach einer fachdidaktischen Analyse und einigen Kontextüberlegungen wird ein Unterrichtskonzept vorgestellt, welches drei Unterrichtsstunden umfasst und den Schülern und Schülerinnen die Berechnung von Entfernungen auf der Erdkugel näher bringt.

Zielgruppe und Vorwissen

Eine meiner Intentionen bei der Erstellung dieser Diplomarbeit war das Schaffen eines verständlichen Zugangs zur sphärischen Geometrie. Ich wollte ein möglichst lückenloses Verständnis dieser Inhalte ermöglichen. Zusätzlich sollte jedoch eine, aus mathematischer Sicht, saubere Arbeit entstehen. Diese Zielsetzung beinhaltet das Erstellen von Beweisen, was die Komplexitätsstufe deutlich hebt. Folglich stand ich vor der Herausforderung, beide Intentionen zu verbinden. Ich bemühte mich daher, keine Beweisschritte auszulassen und fügte großzügig Erklärungen hinzu, um die Beweise nachvollziehbarer zu gestalten. Dennoch liefen die ausformulierten Inhalte Gefahr, für Außenstehende als eine Aneinanderreihung wahlloser Zeichen zu wirken. Das lag natürlich am fehlenden Vorwissen. Daher entschied ich mich dazu, die Arbeit mit einem umfassenden Grundlagenteil zu eröffnen. In diesem soll das nötige Vorwissen erarbeitet werden, um die beiden folgenden Hauptteile lückenlos verstehen zu können. Jede interessierte Person, welche die vier Grundrechnungsarten kennt und sich ein wenig in die Grundlagen der Mengen- und Funktionslehre eingelesen hat, sollte in der Lage sein, die mathematischen Inhalte der

Arbeit problemlos nachvollziehen zu können. Sollte der Leser oder die Leserin nun den innerlichen Drang verspüren, sich in die beiden grundlegenden Konzepte Mengen und Funktionen einlesen zu wollen, so möchte ich ihn auf das Kapitel 24 [Zeg08, S. 335 - 339] und auf die ersten Seiten des Kapitels 25 [Zeg08, S. 341 - 343] des fachdidaktisch hochwertigen Buches "Grundlagen der Mathematik für Dummies" hinweisen.

Literatur

Die verwendete Literatur beinhaltet sämtliche Werke der sphärischen Geometrie, die sich alle im Literaturverzeichnis auf der letzten Seite finden lassen. Dabei möchte ich an dieser Stelle unbedingt zwei Werke namentlich erwähnen, die mir als Basisliteratur dienten und somit den Inhalt und Aufbau dieser Diplomarbeit stark prägten.

Sämtliche Definitionen und Beweisideen für den zweiten und dritten Teil entnahm ich dem dritten Kapitel [Bär08, S. 125 - 137] des unveröffentlichten Vorlesungsskriptums der Lehrveranstaltung "Elementargeometrie" von Christian Bär .
Der Aufbau des dritten Teils orientiert sich stark am vierten Kapitel [Sch17, S. 63 - 79] des Buches "Geometrie auf der Kugel" von Berthold Schuppar.

Teil I.
Grundlagen

Für eine unbeschränkte Auseinandersetzung mit der Sphärischen Geometrie, benötigt es zunächst noch ein gewisses Maß an Vorbereitung. In diesem Grundlagenteil sollen daher bekannte Inhalte aufgefrischt und Neue, welche wir für die Kernteile benötigen, eingeführt werden.

2. Schreibweisen und grundlegende Konzepte

Im Laufe der letzten Jahrzehnte formte sich ein Dschungel von eigenartigen und wahnwitzigen Symbolen zu einer sinnvollen Sprache, welche wir als nützliches Werkzeug für die Darstellung mathematischer Inhalte verwenden können. Damit lassen sich komplizierte Aussagen logisch und effizient in wenigen Zeilen zusammenfassen. Dennoch existieren unterschiedliche Schreibweisen und es werden für die selben mathematischen Konzepte verschiedene Symbole zur Darstellung verwendet.

Daher verfolgt dieses Kapitel das Ziel, die in der Arbeit verwendeten Schreibweisen aufzuzeigen, um etwaige Missverständnisse präventiv auszusparen.
Weiters soll dieses Kapitel weniger versierte Leser der Mathematik in die mathematische Sprachwelt einführen.

2.1. Mengen

Mengen werden in dieser Arbeit wie gewohnt mithilfe von geschwungenen Klammern dargestellt.
Sollte eine Menge über eine Bedingung ihrer Elemente dargestellt werden, so leitet ein Doppelpunkt die definierende Eigenschaft ein. Beispielsweise wird die Menge aller ganzen Zahlen, die Größer als 3 sind wie folgt dargestellt.

$$\{x \in \mathbb{Z} : x > 3\}$$

Bei dem Symbol "$\mathbb{Z}$" handelt es sich um die Menge der ganzen Zahlen. Das Symbol "$\in$", bedeutet wörtlich "aus" oder "ein Element von". Damit will man, konkret im obigen Beispiel, betonen, dass "x" ein Element der ganzen Zahlen ist. Einfacher ausgedrückt heißt das, dass x eine ganze Zahl ist. Der Doppelpunkt bedeutet konkret "für die gilt". Die beschriebene Menge würde sich in deutscher Sprache so beschreiben lassen:
"Die Menge aller ganzen Zahlen, für die gilt, dass sie größer als 3 sind."

Falls wir ein mathematisches Objekt einen Namen geben wollen, so verwenden wir das Zeichen ":=". Wenn wir also nun die Menge $\{x \in \mathbb{Z} : x > 3\}$ den Namen M geben wollen,

so drücken wir das mathematisch wie folgt aus:

$$M := \{x \in \mathbb{Z} : x > 3\}$$

2.2. Funktionen

Für das nächste grundlegende Konzept nehmen wir an, dass es sich bei D und B um zwei Mengen handelt. Die Funktion oder Abbildung f, welche von D nach B abbildet wird so dargestellt.

$$\begin{aligned} f : D &\to B \\ d &\mapsto f(d) \end{aligned}$$

Die Menge D nennen wir Definitionsbereich, die Menge B nennen wir Bild - oder Wertebereich der Funktion f. Das Objekt d ist ein Element von D und wird auch "Argument" genannt. Das Objekt $f(d)$ ist ein Element von B und wird "Funktionswert von f an der Stelle d", oder einfach nur "f von d" genannt.

Manchmal bekommen Funktionen keinen Kleinbuchstaben als Namen sondern ein Symbol, welches mithilfe eines Punktes zeigt, wo man ein Argument zur Funktionswertbildung einsetzen soll. Zum Beispiel würde die Quadratfunktion so dargestellt werden.

$$\begin{aligned} (\cdot)^2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x)^2 \end{aligned}$$

Diese Funktion bildet demnach eine reelle Zahl auf ihr Quadrat ab. Manchmal wird statt "abbilden" das Synonym "zuordnen" verwendet. Alternativ könnte die Quadratfunktion in dieser Arbeit auch als die Funktion beschrieben werden, welche jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnet.

2.3. Intervalle

Bei einem Intervall stellt sich meistens die Frage, ob die Ränder im Intervall liegen oder nicht. Angenommen $a, b \in \mathbb{R}$ sind zwei reelle Zahlen. Wollen wir nun das Intervall zwischen a und b mit den Rändern darstellen, so verwenden wir eckige Klammern.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

. Wenn die Ränder zum Intervall gehören, spricht man von einem "abgeschlossenen" Intervall.

Wenn wir hingegen das Intervall zwischen a und b ausschließlich der Ränder darstellen wollen, benützen wir runde Klammern.

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

. Ein Intervall ohne seine Ränder nennen wir "offen".

Es können auch halboffene Intervalle vorkommen. Zum Beispiel könnte bei einem Intervall der rechte Rand a hinzugehören, wohingegen der linke Rand b ausgeschlossen wird. Dieses Intervall würde man wie folgt darstellen.

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

2.4. Aussagenlogik

Um bestimmte Aussagen in einem mathematischen Kontext treffen zu können, benötigen wir noch mehr Symbole.
Im Laufe der Arbeit werden wir vom Existquantor "$\exists$" und vom Allquantor "$\forall$" Gebrauch machen. Das Zeichen "$\exists$" steht für "es existiert ein". Das Symbol "$\forall$" bedeutet wörtlich "Für alle". Eine Aussage oder Behauptung könnte zum Beispiel so aussehen:

$$\exists z \in \mathbb{Z} : z < 5$$

Übersetzt bedeutet diese Behauptung: "Es existiert eine ganze Zahl, für die gilt, dass sie kleiner als 5 ist."
In der Mathematik ist es besonders interessant, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. Um diese Behauptung als wahr bezeichnen zu dürfen, müssen wir sie beweisen. Das ist in diesem Fall aber sehr einfach. Wir müssen dazu nur eine ganze Zahl finden, die kleiner 5 ist. Zum Beispiel ist 4 eine ganze Zahl, die kleiner 5 ist. Damit gilt die Aussage "$\exists z \in \mathbb{Z} : z < 5$" als bewiesen und somit auch als wahr.
Wenn wir nun den Existquantor gegen einen Allquantor austauschen würden, würden wir eine komplett andere Aussage erhalten. Die Aussage

$$\forall z \in \mathbb{Z} : z < 5$$

bedeutet in Worten: "Für alle ganzen Zahlen gilt, dass sie kleiner als 5 sind." Diese Aussage ist natürlich nicht wahr. Man kann sie leicht widerlegen indem man eine ganze Zahl findet, die größer gleich 5 ist.
Man kann zusätzlich zur Bedingung $z < 5$ noch eine weitere Bedingung an die ganze Zahl z hinzunehmen und in eine Aussage verpacken. Dazu benötigt man das Zeichen "$\vee$" für "oder" oder das Symbol "$\wedge$"für "und". Dabei gilt zu beachten, dass "$\vee$" immer für ein einschließliches "Oder" steht. Das bedeutet "und/oder". Das ausschließliche "Oder" bedeutet dahingegen "entweder/oder".

$$\exists z \in \mathbb{Z} : (z < 5) \vee (z \geq 3)$$

In Worten bedeutet diese Behauptung "Es existiert eine ganze Zahl, für die gilt, dass sie echt kleiner 5 und/oder größer gleich 3 ist." Im Sinne der Übersichtlichkeit wurden die beiden Bedingungen in Klammern gesetzt.

2.5. Der direkte Beweis

In der Mathematik gibt es zahllose Beweisstrategien, die zur Lösung unterschiedlichster Probleme eingesetzt werden. Für die Inhalte dieser Arbeit benötigen wir lediglich die **direkte** Beweisführung.
Das grundlegende Prinzip des direkten Beweises ist das wiederholende Ziehen logischer Schlüsse. Man startet bei einer Annahme A. Man geht dabei also davon aus, dass A eine wahre Aussage ist. Anschließend zeigt man durch logische Schlussfolgerungen die Richtigkeit einer anderen Aussage B. Somit konnte man beweisen, dass B aus A folgt, falls A eine wahre Aussage ist. Mathematisch umschreibt man eine Schlussfolgerung oder Implikation mittels einem Folgepfeil "$\Rightarrow$". Demnach schreibt man für "B folgt aus A"

$$A \Rightarrow B$$

Es könnte auch vorkommen, dass sich zwei Aussagen gegenseitig implizieren. Zum Beispiel könnte man A aus B und umgekehrt auch B aus A folgern. In diesem Fall wären die beiden Aussagen äquivalent, was man mithilfe eines Äquivalenzpfeiles "$\Leftrightarrow$" kennzeichnet. Wären A und B zwei äquivalente Aussagen, so würde man das wie folgt umschreiben.

$$A \Leftrightarrow B$$

Auch bei einer Gleichung handelt es sich um eine mathematische Aussage. Mittels sogenannten Äquivalenzumformungen können wir eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung umformen. Wenn wir also nun die Gültigkeit einer Gleichung beweisen wollen, formen wir eine wahre Gleichung mittels Äquivalenzumformungen so lange um, bis wir die zu beweisende Gleichung erhalten haben. Eine Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl oder das Addieren beider Seiten mit derselben Zahl sind Äquivalenzumformungen.

Auch durch das Legen einer Gleichheitskette können wir einen direkten Beweis praktizieren. Dabei geht man von einem mathematischen Objekt aus und legt so lange Gleichheitszeichen, bis man die gewünschte Gleichung erhält.

Da Beweisführungen nicht in jeder Schulform behandelt werden, könnten sie für den Leser etwas ungewohnt sein. Daher werden wir zur Übung einen Satz zeigen, dessen Beweis kurz und übersichtlich verläuft. Dabei gilt zu beachten, dass jeder Beweis mit dem Wort "*Beweis.*" eingeleitet und mit dem Symbol "□" abgeschlossen wird.

Satz 1. *Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.*

Beweis. Diesen Satz wollen wir nun mittels einer direkten Beweisführung zeigen. Dazu benötigen wir eine Annahme, auf dessen Grundlage wir den Satz herleiten.

Annahme:	Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade natürliche Zahl
Zu beweisende Aussage:	Die natürliche Zahl n^2 ist ungerade.

Wir versuchen also nun von der Annahme aus, auf die zu beweisende Aussage schlusszufolgern.
Wie könnte man eine ungerade natürliche Zahl darstellen?
Es gibt nun immer eine andere natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit

$$n = 2 \cdot k + 1 \qquad \text{(ungerade)}$$

Da n, aufgrund der Annahme, eine natürlich ungerade Zahl ist, gilt diese Gleichung. Nun betrachten wir n^2 und verwenden die Gleichung "$n = 2 \cdot k + 1$". Anschließend multiplizieren wir das Quadrat aus.

$$n^2 \overset{\text{ungerade}}{=} (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 2 \cdot k + 2 \cdot k + 1 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$$

Nun nutzen wir das Verteilungsgesetz und heben die Zahl 2 geschickt aus der Summe $4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$ heraus.

$$4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 \overset{\text{herausheben}}{=} 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

Gerade Zahlen sind immer durch 2 ganzzahlig teilbar. Teilt man $2 \cdot (2k^2 + 2k)$ durch 2, so erhält man $(2k^2 + 2k)$. Bei dieser Zahl handelt es sich aber um eine natürliche Zahl, da k auch eine natürliche Zahl ist. Daher muss $2 \cdot (2k^2 + 2k)$ eine gerade natürliche Zahl sein. Wenn man eine gerade Zahl mit 1 addiert, erhält man immer eine ungerade Zahl. Somit muss $2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$ ungerade sein! Zusammenfassend gilt also nun folgendes.

$$n^2 = \underbrace{2 \cdot (2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} + 1$$

Daher ist n^2 ungerade, falls n ungerade ist. Somit konnten wir den Satz auf direkte Weise beweisen. □

3. Trigonometrische Funktionen und der Einheitskreis

In der sphärischen Trigonometrie spielen, wie der Name schon erwähnt, die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus eine große Rolle. In jedem der Sätze, die wir gemeinsam im Teil "Sphärische Trigonometrie" erarbeiten werden, kommt mindestens eine dieser Funktionen vor. Weiters benötigen wir auch noch den Arkuskosinus um Abstände auf der Sphäre bestimmen zu können. Daher möchte ich gerne dieses Unterkapitel dazu verwenden, das Verständnis über trigonometrischen Funktionen zu verfestigen.

Dabei werden wir die Funktionen am Einheitskreis [HO16] und nicht so wie im Schulunterricht oft praktiziert, nur mittels rechtwinkliger Dreiecke einführen. Ich habe mich für diesen Ansatz entschieden, da man im Kapitel 16 "Großkreise" dann auch leicht erkennen kann, warum wir bei der Definition des Großkreises die Sinus - und Kosinusfunktion benötigen. Zusätzlich sind wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, wie beispielsweise die Periodizität dadurch gut erkennbar.

Dazu soll nun geklärt werden, was wir unter dem Einheitskreis verstehen.
Der Einheitskreis sind alle Punkte in der Ebene, die den Abstand 1 vom Nullpunkt haben. Diese Menge bezeichnen wir mit $\mathbb{S}^1$ und beschreiben sie so:

$$\mathbb{S}^1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Inwiefern beschreibt diese Menge nun alle Punkte in der Ebene, die Abstand 1 vom Nullpunkt haben?
Man nehme sich einen Punkt (x, y) des Einheitskreises und verbindet diesen mit dem Nullpunkt. Diese Strecke besitzt die Länge 1 und wir betrachten sie als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Längen der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks sind die Komponenten x und y. Der Satz von Pythagoras sagt uns, dass Kathete zum Quadrat plus die andere Kathete zum Quadrat gleich der Hypotenuse zum Quadrat ergibt. Somit gilt in unserem Fall $x^2 + y^2 = 1^2$, also $x^2 + y^2 = 1$. Daher bilden alle Punkte, deren Komponenten diese Eigenschaft besitzen, den Einheitskreis.
Der Umfang des Einheitskreises beträgt genau 2π. Nun drehen wir den Punkt $(0, 1)$, mit dem Nullpunkt als Fixpunkt, um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ gegen den Uhrzeigersinn. So erhalten wir den Punkt $P_\alpha \in \mathbb{S}^1$. Die erste Komponente des Punktes P_α nennen wir *Cosinus* des Winkels α und die zweite Komponente wird mit *Sinus* des Winkels α bezeichnet. Wir schreiben für die Komponenten $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$. So können wir den Punkt P_α wie folgt beschreiben:

$$P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

Die Abbildung 1 auf Seite 11 soll dabei als Denkstütze dienen.
Da P_α also ein Element des Einheitskreises ist, muss für die Komponenten von P_α demnach $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$ gelten. Denn auch diese Komponenten bilden ein rechtwinkliges Dreieck im Einheitskreis und der Satz von Pythagoras kann auch hier greifen. Klarerweise muss das für jeden Winkel α gelten. Also gilt mathematisch ausgedrückt

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : (\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$$

. Da die Komponenten des Punktes P_α vom Winkel α abhängig sind, macht es durchaus Sinn, diese Abhängigkeit mithilfe von Funktionen zu modellieren. Daher fassen wir die Komponenten von P_α nun als Funktionswerte der Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \alpha \mapsto \cos(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], \alpha \mapsto \sin(\alpha)$$

auf. Daher werden sie auch Winkelfunktionen genannt.

Nun leiten wir uns eine bedeutende Eigenschaft der Sinus - und Kosinusfunktion her.
Man stelle sich nun vor, dass der Winkel α mit 2π addiert wird. Was passiert dann mit dem Punkt P_α? Im Prinzip fährt der Punkt einmal die Runde und landet wieder am ursprünglichen Ort. Kurz gesagt gilt $P_\alpha = P_{(\alpha+2\pi)}$. Folglich müssen die beiden Punkte die selben Komponenten haben. Also gilt weiters:

$$P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (\cos(\alpha + 2\pi), \sin(\alpha + 2\pi)) = P_{(\alpha+2\pi)}$$

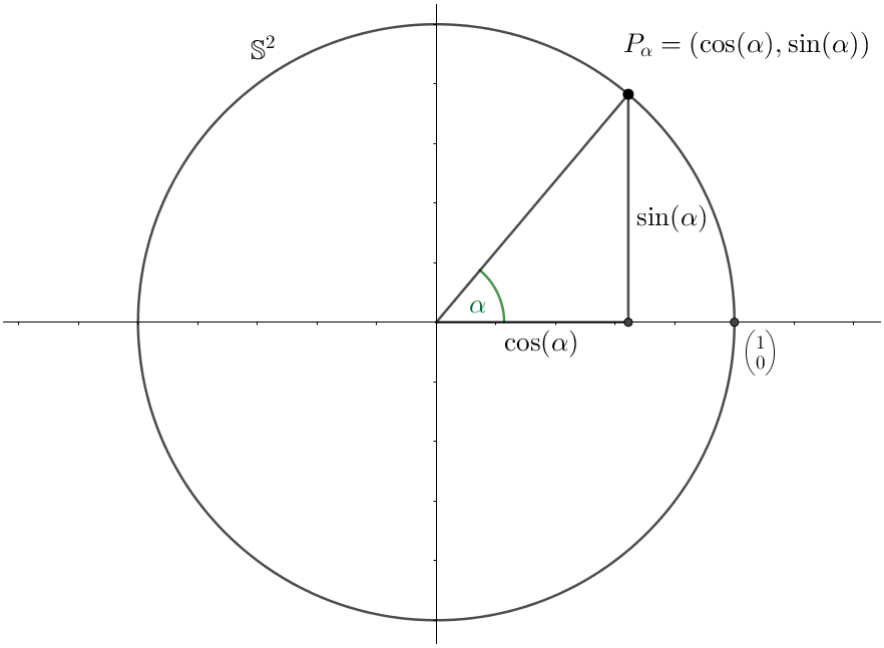


Abbildung 1: Einheitskreis

Ob der Punkt P_α nun einmal, zweimal oder 30 - mal "die Runde" macht, ist nicht von Bedeutung. Die Komponenten bleiben die selben. Somit können wir eine wichtige Eigenschaft der Sinus - und Kosinusfunktion herleiten. Es gilt nämlich nun:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos(\alpha)$$

, wobei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist und die Anzahl der "Umrundungen" angibt. Diese Eigenschaft der Sinus - und Kosinusfunktion nennt man Periodizität. Die Namensgebung macht durchaus Sinn, da die beiden Funktionen in jeder "Periode" die selben Funktionswerte annehmen.
Im nächsten Absatz werden wir nun eine Vorarbeit für die Darstellung von Großkreisen leisten. Wir klären nämlich nun, inwiefern der Einheitskreis mithilfe der beiden Winkelfunktionen Sinus und Cosinus dargestellt werden kann.

Da P_α ein Punkt auf dem Einheitskreis ist, können wir nun den Einheitskreis als Menge aller Punkte P_α für $\alpha \in [0, 2\pi)$ auffassen. Alternativ ist nun folgende Beschreibung der Menge $\mathbb{S}^1$ möglich:

$$\mathbb{S}^2 = \{P_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

Die Punkte P_α sind, wie schon beschrieben, Zahlenpaare und somit auch Vektoren. Daher können wir sie komponentenweise addieren, sowie mit einer Zahl multiplizieren.

Das erlaubt es uns, die Menge $\mathbb{S}^1$ weiter "umzuschreiben".

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^2 &= \{P_\alpha : \alpha \in [0, 2\pi)\} \\
&\overset{P_\alpha = (cos(\alpha), \sin(\alpha))}{=} \{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) : \alpha \in [0, 2\pi)\} \\
&\overset{\text{komp. Addition}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\
&\overset{\text{Skalarmult.}}{=} \left\{ \cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi) \right\}
\end{aligned}$$

In der letzten Darstellung von $\mathbb{S}^1$ sieht man recht gut, dass sich nun jeder Punkt P_α vom Einheitskreis eindeutig durch die beiden Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie durch die Winkelfunktionen darstellen lässt. Diese Erkenntnis ist später wichtig, um verstehen zu können, warum man einen Großkreis mit der Sinus - und Kosinusfunktion darstellen kann.

Um später den Abstand zweier Punkte auf der Kugel bestimmen zu können, benötigen wir noch die Umkehrfunktion des Kosinus. Diese gesuchte Funktion soll ein Bild der Kosinusfunktion $\cos(\alpha)$ auf den Winkel α abbilden. Man spricht deswegen von einer "Umkehrfunktion", da das Bild der Kosinusfunktion nun das Argument ist und das Argument der Kosinusfunktion nun das Bild ist. Es tritt jedoch leider folgendes Problem auf:
Aufgrund der Periodizität der Winkelfunktionen nehmen mehrere Winkel den selben Funktionswert bezüglich des Cosinus an. Mathematisch ausgedrückt gilt also folgendes.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2 \cdot 2\pi) = \cos(\alpha + 3 \cdot 2\pi) = \cos(\alpha + 4 \cdot 2\pi) = \ldots$$

Die Periodizität ist jedoch nicht die einzige Hürde, die wir für eine ordentliche Definition der Umkehrfunktion des Cosinus, überwinden müssen. Die Abbildung 2 auf Seite 13 zeigt gut, dass es zu einem Punkt P_α auf dem oberen Halbkreis einen Punkt P_β auf dem unteren Halbkreis gibt mit $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$.
Das alles ist insofern ein Problem, da die Umkehrfunktion mehrere Winkel zur Verfügung hat, welche sie dem Funktionswert des Kosinus zuordnet. Die "Umkehrfunktion" muss als Funktion jedoch immer eine eindeutige Zuordnungsvorschrift sein.
Wir können dieses Problem jedoch geschickt beseitigen, indem wir nicht alle möglichen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ zulassen. Wir erlauben nur mehr jene Winkel α, deren Punkte P_α im oberen Halbkreis des Einheitskreises liegen. Wir nehmen demnach an, dass sich nun alle Winkel α im Intervall $[0, \pi]$ befinden. Wir schränken aus diesem Grund den Definitionsbereich des Cosinus von $\mathbb{R}$ auf $[0, \pi]$ ein. Mathematisch wird diese Vorgehensweise wie folgt gekennzeichnet:

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1], \alpha \mapsto \cos|_{[0,\pi]}(\alpha)$$

Diese neue eingeschränkte Kosinusfunktion hat nun den großen Vorteil, dass unterschiedliche Winkel nun auch unterschiedliche Funktionswerte liefern. Somit besitzt diese Einschränkung nun tatsächlich eine Umkehrfunktion, da nun eine eindeutige Zuordnung möglich ist.

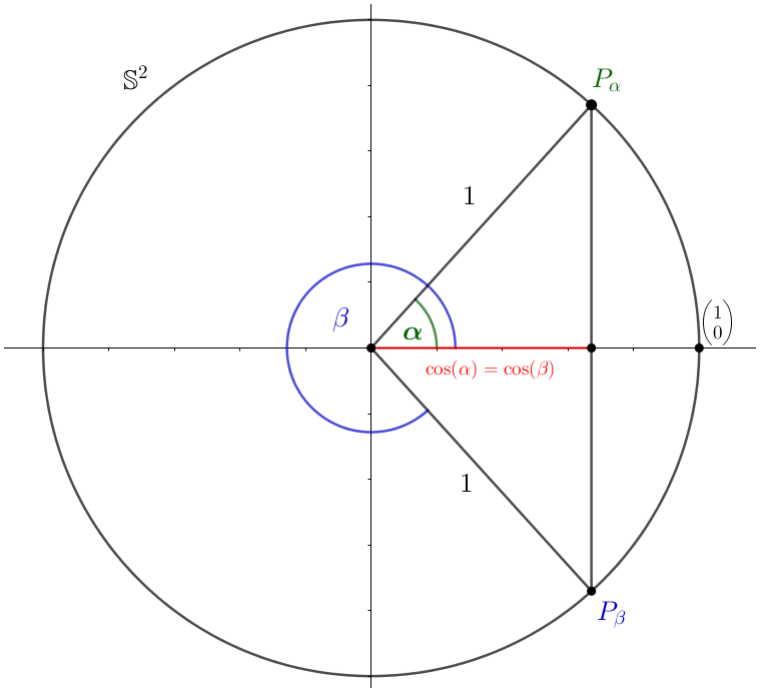


Abbildung 2: Gleicher Funktionswert

Definition 1. *Die Funktion*

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], x \mapsto \arccos(x) := \left(\cos|_{[0,\pi]}(x)\right)^{-1} := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(x)$$

ist die Umkehrfunktion der Einschränkung des Kosinus auf $[0,\pi]$ *und heißt Arkuskosinus.*

Es liegt auf der Hand, dass für jeden Winkel $\alpha \in [0,\pi]$ nun gilt:

$$\cos|_{[0,\pi]}(\alpha) = \cos(\alpha)$$

Für jeden Winkel $\alpha \in [0,\pi]$ gilt nun folglich:

$$\arccos(\cos(\alpha)) = \left(\cos^{-1}(\cos(\alpha))\right) = \alpha$$

Die letztere Gleichungskette werden wir, wie schon erwähnt, benötigen um den kürzesten Abstand zweier Punkte auf der Sphäre berechnen zu können.

Wir benötigen für einen späteren Beweis ein sogenanntes Additionstheorem der Winkelfunktionen. Dieses Additionstheorem werden wir in dieser Arbeit jedoch nicht beweisen. Dazu müssten wir noch zusätzlich über Reihen und Reihenentwicklung, über komplexe Zahlen, über die euler'sche Zahl und über die euler'sche Formeln sprechen. Das würde den Rahmen sprengen und den Fokus der Arbeit verrücken. Deshalb werde ich das nötige Additionstheorem an dieser Stelle lediglich formulieren und den Leser darum bitten,

einfach an die Gültigkeit dieses unbewiesenen Theorems zu glauben. Sollte sich der Leser dennoch an einen ordentlichen Beweis sehnen, so soll ihm der Beweis nach Königsberger [Kön03, S. 118] empfohlen werden. Abgesehen davon folgen nun die beiden, für uns relevanten, Additionstheoreme.

Für zwei Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

und

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Nun möchte ich noch eine weitere wichtige trigonometrische Funktion einführen, welche wir vermehrt im Teil "Sphärische Trigonometrie" benötigen werden.

Definition 2. *Die Funktion*

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

heißt Tangens.

Der Definitionsbereich des Tangens mag beim ersten Hinschauen vielleicht ein wenig abschreckend wirken, jedoch macht sie sehr wohl Sinn. Der Tangens wird als Quotient der Sinus - und Kosinusfunktion definiert, was zu Problemen führen kann, falls der Kosinus 0 wird. Denn dann würde man durch 0 dividieren, was mathematisch keinen Sinn ergibt. Im mathematischen Fachjargon würde man dann vom Verschwinden des Tangens sprechen. Durch die Verwendung der Menge $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ als Definitionsbereich des Tangens, vermeidet man ein solches Verschwinden, da man all jene Werte, die den Cosinus auf 0 abbilden, ausspart. Es ist zu empfehlen den Tangens als Verhältnis zwischen Sinus und Kosinus zu interpretieren.

Somit haben wir alle, für uns wichtigen, Aspekte der trigonometrischen Funktionen besprochen und können zum nächsten Kapitel übergehen.

4. Matrizen und Determinanten

Im Hauptteil der Arbeit müssen wir mit Determinanten von Matrizen arbeiten. Daher werden wir in diesem Kapitel kurz erklären, was Matrizen sind und welche Formen sie annehmen können. Anschließend werden wir besprechen, wie man Determinanten von gewissen Matrizen berechnen kann.
Eigentlich sind Matrizen nichts anderes als rechteckige Zahlenfelder [SM10, S. 55]. Dabei befinden sich in jeder Zeile eines dieser rechteckigen Zahlenfelder immer gleich viele

Zahlen. Auch die Anzahl der Zahlen in jeder Spalte ist gleich. Eine Matrix muss jedoch nicht zwingend gleich viele Zeilen wie Spalten haben. Zum Beispiel kann man ein Zahlentripel als eine Matrix mit drei Zeilen und einer Spalte auffassen. Matrizen werden im allgemeinen gerne mit Großbuchstaben versehen. Die Namensgebung von Matrizen ist im übrigen sehr wichtig, da man sie im Text oder im Gespräch dann leicht voneinander unterscheiden kann.
Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & -59 \\ -45 & 4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 98,5 & 8 & 8,33 & 4 & 0 & 10,7 \end{pmatrix}$$

Oft kann man eine Matrix nicht konkret hinschreiben, weil man die Zahlen einer Matrix, auch Einträge genannt, nicht kennt. Man kann die unbekannten Einträge von Matrizen jedoch natürlich auch mit Buchstaben bezeichnen. Dabei macht man in der Regel gerne von Indizes Gebrauch, um genau angeben zu können um welchen Eintrag es sich handelt. So beschreibt zum Beispiel "a_{12}" den Eintrag der Matrix A an der Stelle der ersten Zeile und zweiten Spalte. Demnach kann die Matrix A aus obigen Beispiel, auch so hingeschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung einer Matrix wählt man meistens dann, wenn man über die Anzahl der Zeilen und Spalten Bescheid weiß und mit der Matrix rechnen möchte, obwohl man die Einträge nicht konkret kennt. Möchte man nur die Anzahl der Zeilen und Spalten einer Matrix vermitteln, so gibt es dafür eine effiziente Schreibweise. Die Matrix A besitzt beispielsweise 3 Zeilen und 4 Spalten. Weiters weiß man, dass die Einträge der Matrix A nur natürliche Zahlen sind. So schreibt man dann als Mathematiker

$$A \in \mathbb{N}^{3\times 4}$$

und sagt dazu: *A ist eine drei kreuz vier Matrix mit natürlichen Einträgen.* Die Menge aller Matrizen mit 3 Zeilen, 4 Spalten und natürlichen Einträgen nennt man demnach $\mathbb{N}^{3\times 4}$.
Analog kann man sich nun überlegen, in welchen Mengen die beiden Matrizen T, M, von obigen Beispiel, liegen...

Die Matrix T besitzt zwei Zeilen und ebenso viele Spalten. Da alle Einträge ganze Zahlen sind, schreibt man nun übersichtlich:

$$T \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$$

Die Matrix M hat nur eine Zeile, aber sechs Spalten. Ihre Einträge sind reell. Daher schreiben wir

$$M \in \mathbb{R}^{1\times 6}$$

. Falls eine Matrix gleich viele Zeilen wie Spalten besitzt, so nennt man sie quadratische Matrix. Zum Beispiel ist die oben angeführte Matrix T eine quadratische Matrix, da sie 2 Zeilen als auch 2 Spalten besitzt.

Nachdem wir nun wissen, was Matrizen sind und wie sie aussehen können, widmen wir uns nun den Determinanten.
Eine Determinante ist eine Zahl, welche einer quadratischen Matrix eindeutig zugeordnet ist. Also besitzt jede quadratische Matrix genau eine Determinante. Mit Determinanten kann man wichtige Eigenschaften von Matrizen bestimmen, sowie auch Volumina berechnen. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir Determinanten verwenden, um die zentralen Sätze im Teil "Sphärische Trigonometrie" beweisen zu können.
Wie schon erwähnt ordnen wir einer quadratischen Matrix eine Zahl zu. Daher können wir die Determinante mithilfe einer Funktion bzw. Zuordnungsvorschrift hervorragend beschreiben.

Definition 3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Die Funktion*

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : M \mapsto \det(M)$$

bildet jede quadratische $n \times n$ - Matrix M auf eine reelle Zahl $\det(M)$ ab. Diese Zahl nennt man Determinante von M.

Doch wie kann man nun die Determinante einer Matrix berechnen? Mithilfe einer einfachen Formel lassen sich Determinanten von (2×2) - Matrizen sehr leicht bestimmen. Dazu müssen die Einträge der Matrix bekannt sein. Wir nehmen nun $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ an. In der folgenden Zeile wird nun die Determinante der Matrix A berechnet.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$$

Ich habe die Einträge von A derartig eingefärbt, sodass ein Schema erkennbar ist. Man multipliziert die roten Einträge und zieht davon dann anschließend das Produkt der blauen Einträge ab.
Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} = 2 - (3 \cdot 2) = 2 - 6 = (-4)$$

Also ist die Determinante von $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ gleich (-4).

Auch das Bestimmen von Determinanten von 3×3 - Matrizen geht, mithilfe der Formel

von Sarrus, relativ flott von der Hand. Dazu sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.
Wir erweitern die Matrix B, indem wir die ersten beiden Spalten der Matrix rechts nochmal hinschreiben.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

Nun bilden wir die Produkte der drei Diagonalen, welche von **oben links nach unten rechts verlaufen und genau drei Einträge abdecken**. Diese drei Produkte addieren wir anschließend auf.

$$b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32}$$

Daraufhin bilden wir nun die Produkte der drei Diagonalen, welche von **unten links nach oben rechts** verlaufen und addieren diese auf.

$$b_{31} \cdot b_{22} \cdot b_{13} + b_{32} \cdot b_{23} \cdot b_{11} + b_{33} \cdot b_{21} \cdot b_{22}$$

Abschließend bilden wir die Differenz dieser beiden Summen, indem wir die zweite Summe von der Ersten abziehen.

$$b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - (b_{31} \cdot b_{22} \cdot b_{13} + b_{32} \cdot b_{23} \cdot b_{11} + b_{33} \cdot b_{21} \cdot b_{22})$$

Es ist nicht möglich, die erste Summe von der zweiten Summe abzuziehen, da wir sonst ein falsches Ergebnis erhalten würden.

Bei der erhaltenen Differenz handelt es sich um die Determinante von B. Also:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} :=$$

$$b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} - (b_{31} \cdot b_{22} \cdot b_{13} + b_{32} \cdot b_{23} \cdot b_{11} + b_{33} \cdot b_{21} \cdot b_{22})$$

Somit sind wir nun in der Lage, Determinanten von 2×2 - Matrizen und von 3×3 - Matrizen berechnen zu können.

Zusätzlich können wir mithilfe der Determinante überprüfen, ob zwei Punkte in der Ebene auf einer Gerade liegen, wobei die Gerade durch den Nullpunkt laufen muss. Ferner lässt sich untersuchen, ob drei Punkte im Raum auf einer Ebene liegen, die auch den Nullpunkt enthält. Dazu betrachten wir die Punkte als Spalten und reihen sie nebeneinander an, um eine Matrix zu erhalten. Falls die Determinante dieser erhaltenen Matrix gleich 0 ist, liegen im zweidimensionalen Fall beide Punkte mit dem Nullpunkt auf der Geraden, im dreidimensionalen Raum liegen dann die drei Punkte gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Ebene. Im Sinne der Übersichtlichkeit möchte ich die beschriebene Vorgehensweise auch mithilfe mathematischer Zeichen beschreiben.

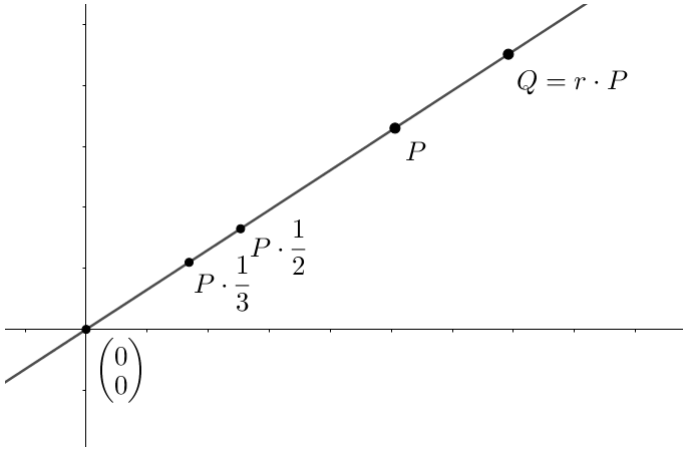


Abbildung 3: Gerade durch 0

Satz 2. *Zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ liegen gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Gerade genau dann wenn*

$$\det(P, Q) = \det\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right) := \det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = 0$$

Beweis. Wenn zwei zweidimensionale Punkte gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Geraden liegen, dann kann man einen Punkt als ein Vielfaches des anderen Punktes darstellen. Wir nehmen also an, dass die Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Geraden liegen. Dann existiert eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ so, dass $Q = r \cdot P$ gilt. Die Abbildung 3 auf Seite 18 soll diese Überlegung visualisieren. Es gilt also demnach Wir betrachten nun die Determinante $\det(P, Q)$.

$$\det(P, Q) = \det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

Nun verwenden die Idee, welche in Abbildung 3 auf Seite 18 dargestellt wurde.

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} p_1 & r \cdot p_1 \\ p_2 & r \cdot p_2 \end{pmatrix} = p_1 \cdot r \cdot p_2 - p_2 \cdot r \cdot p_1 \\ &\overset{\text{herausheben}}{=} r \cdot \underbrace{(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_2)}_{=0} = r \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Somit konnten wir zeigen, dass die Determinante 0 wird, falls zwei zweidimensionale Punkte gemeinsam mit der 0 auf einer Geraden liegen. Es fehlt uns jedoch noch die andere Richtung des Beweises. Wir müssen nun auch noch zeigen, dass zwei Punkte gemeinsam mit der 0 auf einer Geraden liegen, wenn ihre Determinante 0 ist.

Es seien also nun $P, Q \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte mit $\det(P, Q) = 0$.

$$0 = \det(P, Q) = \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$$

Wir konnten also eine Gleichheitskette zwischen 0 und $p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$ legen. Somit gilt $p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 = 0$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 &= 0 \\ \overset{+p_2 \cdot p_1}{\Leftrightarrow} \quad p_1 \cdot q_2 &= p_2 \cdot q_1 \end{aligned}$$

Die beiden Produkte können aber nur dann gleich sein, falls eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $q_1 = r \cdot p_1$ und $q_2 = r \cdot p_2$ existiert. Daher ist Q nun ein Vielfaches von P und wir konnten somit auch diese Richtung zeigen. Damit gilt der Satz als bewiesen. □

Diesen Satz können wir auch leicht in den dreidimensionalen Raum adaptieren.

Satz 3. *Drei Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ liegen gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Ebene genau dann wenn*

$$\det(P, Q, R) := \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = 0$$

Beweis. Auch hier müssen wieder zwei Richtungen bewiesen werden. Zu Beginn zeigen wir direkt, dass die Determinante 0 wird, falls die drei Punkte mit dem Nullpunkt auf einer Ebene liegen.
Es seien $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte, die sich mit dem Nullpunkt auf derselben Ebene befinden. Daher können wir den Punkt R durch die Punkte P, Q und durch zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen. Es gilt nämlich nun

$$R = a \cdot P + b \cdot Q$$

Abbildung 4 auf Seite 20 untermauert diese Behauptung. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, auch die Komponenten von R durch die Komponenten von P und Q darzustellen. Dazu schreiben wir die Punkte P, Q, R als Tripel ihrer Einträge.

$$\begin{aligned} R &= a \cdot P + b \cdot Q \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} &= a \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Skalarmultiplikation und anschließend die komponentenweise

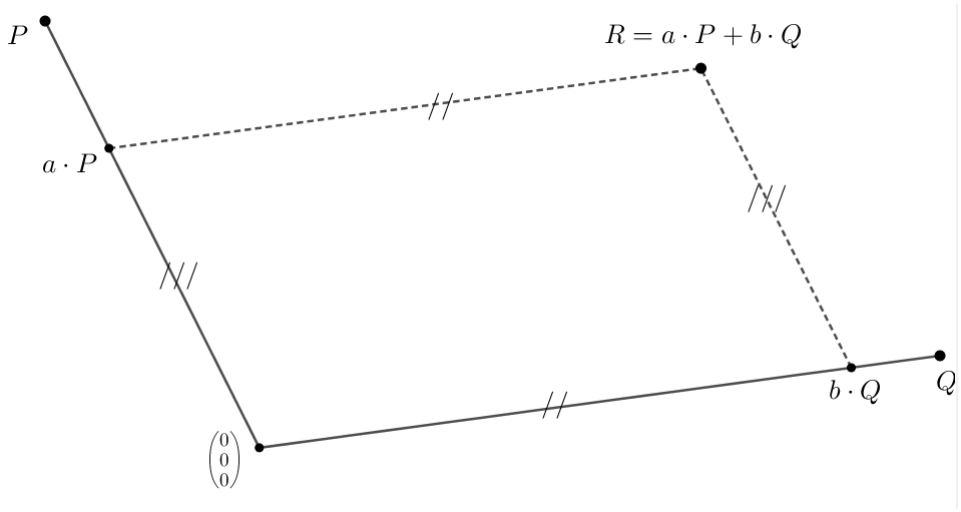


Abbildung 4: Darstellung von R durch P und Q

Addition.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Skalarm.}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot p_1 \\ a \cdot p_2 \\ a \cdot p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \cdot q_1 \\ b \cdot q_2 \\ b \cdot q_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{komp. Add.}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot p_1 + b \cdot q_1 \\ a \cdot p_2 + b \cdot q_2 \\ a \cdot p_3 + b \cdot q_3 \end{pmatrix}$$

Somit gelten die folgenden drei Gleichungen, die im Beweis auch Verwendung finden werden.

$$\begin{aligned} r_1 &= a \cdot p_1 + b \cdot q_1 \\ r_2 &= a \cdot p_2 + b \cdot q_2 \\ r_3 &= a \cdot p_3 + b \cdot q_3 \end{aligned}$$

Nun richten wir unser Augenmerkmal auf die Determinante $\det(P, Q, R)$ und berechnen diese, indem wir die Regel von Sarrus anwenden.

$$\det(P, Q, R) = \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Sarrus}}{=} p_1 \cdot q_2 \cdot r_3 + q_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + r_1 \cdot p_2 \cdot q_3 - (p_3 \cdot q_2 \cdot r_1 + q_3 \cdot r_2 \cdot p_1 + r_3 \cdot p_2 \cdot q_1) \\ &= p_1 \cdot q_2 \cdot r_3 + q_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + r_1 \cdot p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \cdot r_1 - q_3 \cdot r_2 \cdot p_1 - r_3 \cdot p_2 \cdot q_1 \end{aligned}$$

Jetzt nutzen wir die Darstellung für r_1, r_2 und r_3 durch die Einträge von P und Q.

$$\begin{aligned}
&p_1 \cdot q_2 \cdot r_3 + q_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + r_1 \cdot p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \cdot r_1 - q_3 \cdot r_2 \cdot p_1 - r_3 \cdot p_2 \cdot q_1 \\
= &\, p_1 \cdot q_2 \cdot (a \cdot p_3 + b \cdot q_3) + q_1 \cdot (a \cdot p_2 + b \cdot q_2) \cdot p_3 + (a \cdot p_1 + b \cdot q_1) \cdot p_2 \cdot q_3 \\
&- p_3 \cdot q_2 \cdot (a \cdot p_1 + b \cdot q_1) - q_3 \cdot (a \cdot p_2 + b \cdot q_2) \cdot p_1 - (a \cdot p_3 + b \cdot q_3) \cdot p_2 \cdot q_1
\end{aligned}$$

Nachdem wir in allen Summanden ausmultipliziert haben, können wir erkennen, dass sich alles streichen lässt.

$$\begin{aligned}
&p_1 \cdot q_2 \cdot (a \cdot p_3 + b \cdot q_3) + q_1 \cdot (a \cdot p_2 + b \cdot q_2) \cdot p_3 + (a \cdot p_1 + b \cdot q_1) \cdot p_2 \cdot q_3 \\
&- p_3 \cdot q_2 \cdot (a \cdot p_1 + b \cdot q_1) - q_3 \cdot (a \cdot p_2 + b \cdot q_2) \cdot p_1 - (a \cdot p_3 + b \cdot q_3) \cdot p_2 \cdot q_1 \\
\overset{\text{ausmult.}}{=} &\cancel{a p_1 p_3 q_2} + \cancel{b p_1 q_2 q_3} + \cancel{a q_1 p_2 p_3} + \cancel{b q_1 q_2 p_3} + \cancel{a p_1 p_2 q_3} + \cancel{b q_1 p_2 q_3} \\
&\cancel{-a p_1 q_2 p_3} - \cancel{b q_1 q_2 p_3} - \cancel{a p_1 p_2 q_3} - \cancel{b p_1 q_2 q_3} - \cancel{a q_1 p_2 p_3} - \cancel{b q_1 p_2 q_3} \\
= &\, 0
\end{aligned}$$

Somit konnten wir $\det(P, Q, R) = 0$ nachweisen, falls die drei Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ mit dem Nullpunkt auf derselben Ebene liegen.

Um die andere Richtung zeigen zu können, benötigen wir einige Inhalte aus der Linearen Algebra. Zum Beispiel müssten wir für den Beweis die Matrizenmultiplikation, sowie das Konzept von invertierbaren Matrizen einführen. Eine umfassende Auseinandersetzung mit dem Prinzip der Gauß - Elimination und der damit fest verbundenen Stufenform von Matrizen wäre auch unabdingbar. Da die Einführung dieser Voraussetzungen den Rahmen der Arbeit sprengen würde, wird der Beweis für diese Richtung nicht behandelt. Der Leser wird erbeten, einfach an die Aussage des Satzes zu glauben. Der Satz wird im Vorlesungsskriptum von Pauer [Pau17, S.107 - 108] gezeigt. □

Bevor wir zum nächsten Kapitel übergehen können, wollen wir uns noch überlegen, inwiefern sich eine Determinante ändert, wenn man zwei Spalten der Matrix miteinander vertauscht.
Wieder seien $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte im dreidimensionalen reellen Raum. Laut der Definition der Determinante gilt

$$\begin{aligned}
\det(P, Q, R) &:= \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \\
&= p_1 \cdot q_2 \cdot r_3 + q_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + r_1 \cdot p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \cdot r_1 - q_3 \cdot r_2 \cdot p_1 - r_3 \cdot p_2 \cdot q_1
\end{aligned}$$

Was passiert nun, wenn wir zwei Spalten miteinander vertauschen? Was gilt also nun für $\det(Q, P, R)$?

$$\det(Q, P, R) = \det \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & r_1 \\ q_2 & p_2 & r_2 \\ q_3 & p_3 & r_3 \end{pmatrix} = q_1 p_2 r_3 + p_1 r_2 q_3 + r_1 q_2 p_3 - q_3 p_2 r_1 - p_3 r_2 q_1 - r_3 q_2 p_1$$

Nun verwenden wir das Distributivgesetz und heben (-1) aus jedem Summanden heraus.

$$\begin{aligned} & q_1p_2r_3 + p_1r_2q_3 + r_1q_2p_3 - q_3p_2r_1 - p_3r_2q_1 - r_3q_2p_1 \\ = & (-1) \cdot (-q_1p_2r_3 - p_1r_2q_3 - r_1q_2p_3 + q_3p_2r_1 + p_3r_2q_1 + r_3q_2p_1) \end{aligned}$$

Daraufhin vertauschen wir noch ein paar Faktoren und ordnen die Summanden um. Somit wir der letzte Schritt ersichtlicher.

$$\begin{aligned} & (-1) \cdot (-q_1p_2r_3 - p_1r_2q_3 - r_1q_2p_3 + q_3p_2r_1 + p_3r_2q_1 + r_3q_2p_1) \\ = & (-1) \cdot (p_1q_2r_3 + q_1r_2p_3 + r_1p_2q_3 - p_3q_2r_1 - q_3r_2p_1 - r_3p_2q_1) \end{aligned}$$

Bei der nun erhaltenen Summe handelt es sich nun genau um $\det(P, Q, R)$. Es gilt also

$$\det(Q, P, R) = (-1) \cdot \det(P, Q, R)$$

Wenn man also nun zwei Spalten einer Matrix vertauscht, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Es ändert sich nur das Vorzeichen. Genau gesehen, haben wir nun eigentlich nur diese Eigenschaft für 3×3-Matrizen und für das Vertauschen der ersten und zweiten Spalte überprüft. Es ändert sich jedoch auch beim Vertauschen der zweiten und dritten, sowie ersten und dritten Spalte nur das Vorzeichen. Selbiges gilt auch, wenn man Zeilen vertauscht. Dieser Beweis erfolgt analog zum gerade ausgeführten Beweis. Ferner haben auch quadratische Matrizen anderer Dimensionen selbige Eigenschaft.

Weiters besitzt die Determinante die Eigenschaft der Linearität in jeder Spalte. Daher gilt für $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\det(\alpha \cdot A, \beta \cdot B, \gamma \cdot C) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \det(A, B, C)$$

Beweis. Zu Beginn interpretieren wir die drei Punkte als Spalten der Matrix.

$$\det(\alpha \cdot A, \beta \cdot B, \gamma \cdot C) = \det \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 & \beta \cdot b_1 & \gamma \cdot c_1 \\ \alpha \cdot a_2 & \beta \cdot b_2 & \gamma \cdot c_2 \\ \alpha \cdot a_3 & \beta \cdot b_3 & \gamma \cdot c_3 \end{pmatrix}$$

Folgend berechnen wir die Determinante für 3×3 - Matrizen.

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 & \beta \cdot b_1 & \gamma \cdot c_1 \\ \alpha \cdot a_2 & \beta \cdot b_2 & \gamma \cdot c_2 \\ \alpha \cdot a_3 & \beta \cdot b_3 & \gamma \cdot c_3 \end{pmatrix} \\ = & \alpha a_1 \cdot \beta b_2 \cdot \gamma c_3 + \beta b_1 \cdot \gamma c_2 \cdot \alpha a_3 + \gamma c_1 \cdot \alpha a_2 \cdot \beta b_3 \\ - & \alpha a_3 \cdot \beta b_2 \cdot \gamma c_1 - \beta b_3 \cdot \gamma c_2 \cdot \alpha a_1 - \gamma c_3 \cdot \alpha a_2 \cdot \beta b_1 \end{aligned}$$

Da nun in jedem Summanden die reellen Zahlen α, β, γ vorkommen, können wir diese herausheben.

$$\begin{aligned} & \alpha a_1 \cdot \beta b_2 \cdot \gamma c_3 + \beta b_1 \cdot \gamma c_2 \cdot \alpha a_3 + \gamma c_1 \cdot \alpha a_2 \cdot \beta b_3 \\ - & \alpha a_3 \cdot \beta b_2 \cdot \gamma c_1 - \beta b_3 \cdot \gamma c_2 \cdot \alpha a_1 - \gamma c_3 \cdot \alpha a_2 \cdot \beta b_1 \\ = & \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - b_3 \cdot c_2 \cdot a_1 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1) \end{aligned}$$

Nach genauerem hinsehen lässt sich erkennen, dass die Summe in der runden Klammer gerade die Determinante $\det(A, B, C)$ ist.

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - b_3 \cdot c_2 \cdot a_1 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1) \\ &= \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \det(A, B, C) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\det(\alpha \cdot A, \beta \cdot B, \gamma \cdot C) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \det(A, B, C)$$

und der Beweis als abgeschlossen. □

Somit können wir nun zum nächsten Kapitel übergehen.

5. Vektorprodukt

Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt wird uns im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt, welches anschließend eingeführt wird, sehr nützlich sein und die Beweise aus dem Hauptteil immens verkürzen. Dabei werden wir das Vektorprodukt nur auf Punkte im Raum anwenden. Das ist kein Problem, da es sich bei Punkte im Raum um dreidimensionale Vektoren handelt.
Im Prinzip erhält man das Vektorprodukt über eine Funktion, die zwei dreidimensionale Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ auf einen weiteren dreidimensionalen Vektor $v \times w \in \mathbb{R}^3$ abbildet, der normal auf der von v und w erzeugten Ebene steht. Diesen dritten Vektor nennt man Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von v und w. Die Länge des Vektorprodukts entspricht genau der Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren v und w aufgespannt wird.
Die Abbildung 5 auf Seite 24 soll die Definition des Vektorprodukts visualisieren.

Definition 4. *Es seien* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *zwei dreidimensionale Vektoren. Das Bild* $v \times w$ *der Funktion*

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (v, w) \mapsto v \times w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Vektoren v *und* w *nennt man dann Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von* v *und* w*.*

Beispiel:
Wir kennen die Punkte $P = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und möchten uns das Vektorprodukt $P \times Q$

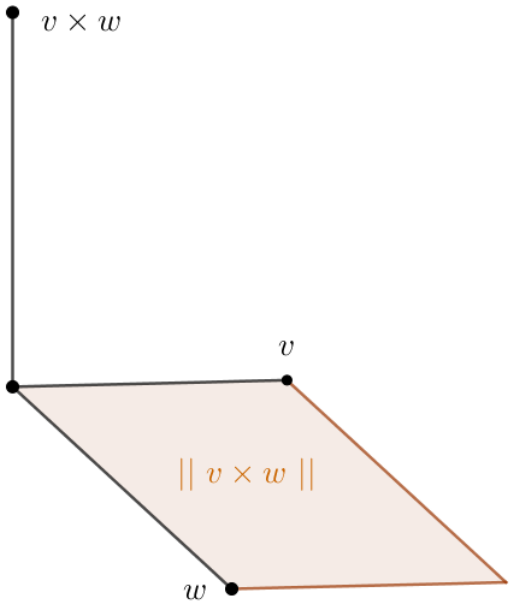


Abbildung 5: Vektorprodukt

berechnen.

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 8 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 - 5 \cdot 8 \\ 5 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} - 6 \\ 12 - 40 \\ 10 - \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} - \frac{18}{3} \\ -28 \\ \frac{30}{3} - \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -28 \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}$$

Wie könnte man diese Beispiel nun interpretieren?
Die Gerade, die durch den erhaltenen Punkt $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -28 \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}$ und des Nullpunktes hindurchgeht steht normal auf der Ebene, welche durch die beiden Punkte P und Q erzeugt wird. Weiters entspricht der kürzeste Abstand des erhaltenen Punktes $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -28 \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}$ zum Nullpunkt genau die Fläche des von P und Q aufgespannten Parallelogramms.

Eine wichtige Eigenschaft ist, dass das Vektorprodukt eines Punktes mit sich selber, immer den Nullpunkt ergibt.
Es gilt also:

$$\forall P \in \mathbb{R}^3 : P \times P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Diese Eigenschaft können wir schnell durch nachrechnen beweisen. Dazu schreiben wir den Punkt P als das Tripel seiner Einträge.

$$P \times P \overset{P \in \mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Anschließend verwenden wir einfach die Definition des Vektorproduktes.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} \begin{pmatrix} p_2 \cdot p_3 - p_3 \cdot p_2 \\ p_3 \cdot p_1 - p_1 \cdot p_3 \\ p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_1 \end{pmatrix}$$

Schlussendlich verwenden wir das Kommutativgesetz um die Faktoren der Produkte zu vertauschen. So erkennt man dann leicht, dass die drei Komponenten jeweils 0 ergeben.

$$\begin{pmatrix} p_2 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_3 \\ p_3 \cdot p_1 - p_3 \cdot p_1 \\ p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Das Vektorprodukt besitzt noch viele weitere praktische Eigenschaften. Eine davon ist die Linearität in der zweiten Komponente. Mathematisch ausgedrückt heißt das folgendes.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall A, B, C \in \mathbb{R}^3 : A \times (\beta \cdot B + \gamma \cdot C) = \beta \cdot (A \times B) + \gamma \cdot (A \times C)$$

Beweis. Wir werden diese Eigenschaft nun mittel Nachrechnen überprüfen. Zu Beginn schreiben wir die Punkte A, B, C als Tripel ihrer Einträge.

$$A \times (\beta \cdot B + \gamma \cdot C) \overset{A,B,C \in \mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right)$$

Anschließend benützen wir zweimal die Skalarmultiplikation und berechnen so $\beta \cdot A$ und $\gamma \cdot C$.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\beta \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \overset{\text{Skalarmult.}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} \beta \cdot b_1 \\ \beta \cdot b_2 \\ \beta \cdot b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \cdot c_1 \\ \gamma \cdot c_2 \\ \gamma \cdot c_3 \end{pmatrix} \right)$$

Nun addieren wir die letztens erhaltenen Punkte komponentenweise auf.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} \beta \cdot b_1 \\ \beta \cdot b_2 \\ \beta \cdot b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \cdot c_1 \\ \gamma \cdot c_2 \\ \gamma \cdot c_3 \end{pmatrix} \right) \overset{\text{komp. Addition}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 \\ \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 \\ \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 \end{pmatrix}$$

Um uns die Anwendung der Definition des Kreuzproduktes zu erleichtern, versuchen wir geschickt zu substituieren.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 \\ \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 \\ \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Substitution}}{=} \begin{bmatrix} d_1 := \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1 \\ d_2 := \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2 \\ d_3 := \beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Daraufhin berechnen wir nun das Vektorprodukt der beiden Punkte.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} \begin{pmatrix} a_2 \cdot d_3 - a_3 \cdot d_2 \\ a_3 \cdot d_1 - a_1 \cdot d_3 \\ a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1 \end{pmatrix}$$

Daraufhin folgt nun die Rücksubstitution.

$$\begin{pmatrix} a_2 \cdot d_3 - a_3 \cdot d_2 \\ a_3 \cdot d_1 - a_1 \cdot d_3 \\ a_1 \cdot d_2 - a_2 \cdot d_1 \end{pmatrix} \overset{\text{Rücksubst.}}{=} \begin{pmatrix} a_2 \cdot (\beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3) - a_3 \cdot (\beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2) \\ a_3 \cdot (\beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1) - a_1 \cdot (\beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3) \\ a_1 \cdot (\beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2) - a_2 \cdot (\beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1) \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt verwenden wir das Distributivgesetz und multiplizieren aus.

$$\begin{pmatrix} a_2 \cdot (\beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3) - a_3 \cdot (\beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2) \\ a_3 \cdot (\beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1) - a_1 \cdot (\beta \cdot b_3 + \gamma \cdot c_3) \\ a_1 \cdot (\beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2) - a_2 \cdot (\beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \beta \cdot a_2 \cdot b_3 + \gamma \cdot a_2 \cdot c_3 - \beta \cdot a_3 \cdot b_2 - \gamma \cdot a_3 \cdot c_2 \\ \beta \cdot a_3 \cdot b_1 + \gamma \cdot a_3 \cdot c_1 - \beta \cdot a_1 \cdot b_3 - \gamma \cdot a_1 \cdot c_3 \\ \beta \cdot a_1 \cdot b_2 + \gamma \cdot a_1 \cdot c_2 - \beta \cdot a_2 \cdot b_1 - \gamma \cdot a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

Jetzt werden wir die Summanden der Summen jeder Zeile neu anordnen. Dadurch ist der vorletzte Rechenschritt leichter zu erkennen.

$$\begin{pmatrix} \beta \cdot a_2 \cdot b_3 + \gamma \cdot a_2 \cdot c_3 - \beta \cdot a_3 \cdot b_2 - \gamma \cdot a_3 \cdot c_2 \\ \beta \cdot a_3 \cdot b_1 + \gamma \cdot a_3 \cdot c_1 - \beta \cdot a_1 \cdot b_3 - \gamma \cdot a_1 \cdot c_3 \\ \beta \cdot a_1 \cdot b_2 + \gamma \cdot a_1 \cdot c_2 - \beta \cdot a_2 \cdot b_1 - \gamma \cdot a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{anordnen}}{=} \begin{pmatrix} \beta \cdot a_2 \cdot b_3 - \beta \cdot a_3 \cdot b_2 + \gamma \cdot a_2 \cdot c_3 - \gamma \cdot a_3 \cdot c_2 \\ \beta \cdot a_3 \cdot b_1 - \beta \cdot a_1 \cdot b_3 + \gamma \cdot a_3 \cdot c_1 - \gamma \cdot a_1 \cdot c_3 \\ \beta \cdot a_1 \cdot b_2 - \beta \cdot a_2 \cdot b_1 + \gamma \cdot a_1 \cdot c_2 - \gamma \cdot a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

Im folgenden Schritt verwenden wir wieder das Distributivgesetz und heben die reellen Zahlen β und γ heraus.

$$\begin{pmatrix} \beta \cdot a_2 \cdot b_3 - \beta \cdot a_3 \cdot b_2 + \gamma \cdot a_2 \cdot c_3 - \gamma \cdot a_3 \cdot c_2 \\ \beta \cdot a_3 \cdot b_1 - \beta \cdot a_1 \cdot b_3 + \gamma \cdot a_3 \cdot c_1 - \gamma \cdot a_1 \cdot c_3 \\ \beta \cdot a_1 \cdot b_2 - \beta \cdot a_2 \cdot b_1 + \gamma \cdot a_1 \cdot c_2 - \gamma \cdot a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{herausheben}}{=} \begin{pmatrix} \beta \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) + \gamma \cdot (a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2) \\ \beta \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) + \gamma \cdot (a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3) \\ \beta \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) + \gamma \cdot (a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1) \end{pmatrix}$$

Nun können wir mithilfe der komponentenweisen Addition den erhaltenen Punkt als Summe von zwei Punkten schreiben. Wir verwenden diese Addition nun nicht so wie üblich, sondern wir gehen den umgekehrten Weg.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \beta \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) + \gamma \cdot (a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2) \\ \beta \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) + \gamma \cdot (a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3) \\ \beta \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) + \gamma \cdot (a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1) \end{pmatrix} \\
\overset{\text{komp. Addition.}}{=} &\begin{pmatrix} \beta \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \\ \beta \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \\ \beta \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \cdot (a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2) \\ \gamma \cdot (a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3) \\ \gamma \cdot (a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Schlussendlich machen wir wieder von der Skalarmultiplikation Gebrauch und ziehen einmal β und einmal γ heraus. Weiters können wir nun zwei Vektorprodukte wiedererkennen.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \beta \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \\ \beta \cdot (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \\ \beta \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \cdot (a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2) \\ \gamma \cdot (a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3) \\ \gamma \cdot (a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1) \end{pmatrix} \\
= \beta \cdot &\underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}}_{=A \times B} + \gamma \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2 \\ a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3 \\ a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}}_{=A \times C} \\
&= \beta \cdot (A \times B) + \gamma \cdot (A \times C)
\end{aligned}$$

Es gilt also für alle Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ und alle reellen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dass

$$A \times (\beta \cdot B + \gamma \cdot C) = \beta \cdot (A \times B) + \gamma \cdot (A \times C)$$

□

Das Vektorprodukt ist auch in der ersten Komponente linear. Es gilt also

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall A, B, C \in \mathbb{R}^3 : (\beta \cdot B + \gamma \cdot C) \times A = \beta \cdot (B \times A) + \gamma \cdot (C \times A)$$

Diese Eigenschaft lässt sich komplett analog beweisen. Daher werden wir uns diesen Beweis an dieser Stelle sparen.
Das Vektorprodukt ist also in der ersten als auch in der zweiten Komponente linear. Zusammenfassend sagt man nur mehr, dass das Vektorprodukt **bilinear** ist.
Wir konnten uns nun eine wichtige Eigenschaft des Vektorproduktes erarbeiten, welche wir im Teil "Sphärische Trigonometrie" für einen Beweis benötigen werden.

Ich möchte noch unbedingt erwähnen, dass das Vektorprodukt nicht kommutativ ist. Es gilt also für zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^3$, dass $A \times B \neq B \times A$.
Um ein Gleichheitszeichen schreiben zu können, müsste man eine Seite der Gleichung mit (-1) multiplizieren. Diese Eigenschaft wird im Kapitel 7 auf Seite 32 in der Form

eines Hilfssatzes präsentiert und auch bewiesen.

Somit haben wir uns ausreichend Viel über das Vektorprodukt erarbeitet und können zum nächsten Kapitel übergehen, in welchem wir über ein weiteres wichtiges Konzept der Mathematik sprechen werden.

6. Skalarprodukt

Da das Skalarprodukt Teil des österreichischen Lehrplans [Bil17] ist, muss keineswegs genauer auf diese Funktion eingegangen werden. Es soll jedoch dringend beachtet werden, dass es mehrere Skalarprodukte gibt. Deswegen möchte ich auch nur jenes Skalarprodukt angeben, welches wir dann auch wirklich benötigen werden. Zusätzlich sollen einige wichtige Eigenschaften des Skalarproduktes erwähnt werden.

Die Funktion

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

beschreibt ein Skalarprodukt. Dieses Skalarprodukt wird auch Standardskalarprodukt genannt und wird im Rahmen dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Wir können also von zwei Punkten $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ aus dem selben Raum $\mathbb{R}^3$ das Standardskalarprodukt berechnen, indem wir jeweils die beiden ersten Einträge a_1 und b_1 miteinander multiplizieren, die zweiten Einträge a_2 und b_2 miteinander multiplizieren und die dritten Einträge a_3 und b_3 jeweils miteinander multiplizieren. Anschließend addieren wir die drei erhaltenen Produkte auf und erhalten somit das Standardskalarprodukt der beiden Punkte A und B.

Beispiel:
Wir kennen die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\langle P, Q \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 7 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} + 1 \cdot 4 = 21 + 1 + 4 = 26$$

Die beiden Punkte P und Q besitzen demnach das Standardskalarprodukt 26.

Analog können wir das Standardskalarprodukt auch für zwei Punkte im zweidimensionalen Raum definieren. Also für Punkte die sich im $\mathbb{R}^2$ befinden.

Beispiel:

Wir kennen die zwei Punkte im zweidimensionalen Raum $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\langle P, Q \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 15 + 4 = 19$$

Das Standardskalarprodukt von P und Q lautet demnach 19.
Weiters besitzt ein Skalarprodukt drei wichtige Eigenschaften, die unbedingt erwähnt werden müssen. Diese drei Eigenschaften werden im folgenden konkret für unser Standardskalarprodukt angegeben.

- Das Standardskalarprodukt ist **symmetrisch**. Das bedeutet für zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^3$, dass

  $$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$$

  gilt.

  Beweis. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^3$.

  $$\langle A, B \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

  Nun benützen wir das Kommutativgesetz, in dem wir die Gleichungen $a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1$, $a_2 \cdot b_2 = b_2 \cdot a_2$ und $a_3 \cdot b_3 = b_3 \cdot a_3$ verwenden.

  $$\begin{aligned} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 &\overset{\text{Kommutativgesetz}}{=} b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + b_3 \cdot a_3 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle B, A \rangle \end{aligned}$$

  Somit gilt also nun

  $$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$$

  □

- Wenn man das Standardskalarprodukt eines Punktes $0 \neq A \in \mathbb{R}^3$ mit sich selber bildet, so ist es immer definitiv **positiv**. Also gilt

  $$\langle A, A \rangle > 0$$

Beweis. Es sei $0 \neq A \in \mathbb{R}^3$.

$$\langle A, A\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Diese Summe würde genau dann gleich 0 sein, wenn alle drei Komponenten gleich 0 wären. Dieser Fall trifft jedoch nicht ein, da in den Voraussetzungen $A \neq 0$ angenommen wurde. Eine Summe von Zahlen ist genau dann positiv, falls jeder ihrer Summanden positiv ist. Da die Summanden der Summe $a_1^2+a_2^2+a_3^2$ Quadrate sind, müssen diese auch positiv sein. Somit gilt nun

$$\underbrace{a_1^2}_{>0} + \underbrace{a_2^2}_{>0} + \underbrace{a_3^2}_{>0} > 0$$

und die Eigenschaft als bewiesen. □

- Das Standardskalarprodukt ist so wie das Kreuzprodukt **bilinear**. Für drei dreidimensionale Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ und für zwei reelle Zahlen $d, e \in \mathbb{R}$ gilt daher:

$$\langle (d \cdot A + e \cdot B), C\rangle = d \cdot \langle A, C\rangle + e \cdot \langle B, C\rangle$$

und

$$\langle A, (d \cdot B + e \cdot C)\rangle = d \cdot \langle A, B\rangle + e \cdot \langle A, C\rangle$$

Beweis. Es genügt die Linearität der ersten Komponente zu zeigen, da die Linearität der zweiten Komponente analog bewiesen wird.
Im ersten Schritt schreiben wir die Punkte A und B als Tripel ihrer Einträge.

$$\langle (d \cdot A + e \cdot B), C\rangle \overset{A,B\in\mathbb{R}^3}{=} \left\langle d \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nun werden wir zweimal die Skalarmultiplikation verwenden und anschließend die beiden neu erhaltenen Punkte komponentenweise miteinander addieren.

$$\left\langle d \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{\text{Skalarmult.}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} d \cdot a_1 \\ d \cdot a_2 \\ d \cdot a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \cdot b_1 \\ e \cdot b_2 \\ e \cdot b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\overset{\text{komp. Add.}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} d \cdot a_1 + e \cdot b_1 \\ d \cdot a_2 + e \cdot b_1 \\ d \cdot a_3 + e \cdot b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nun berechnen wir das Skalarprodukt.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} d \cdot a_1 + e \cdot b_1 \\ d \cdot a_2 + e \cdot b_2 \\ d \cdot a_3 + e \cdot b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\
= \; & (d \cdot a_1 + e \cdot b_1) \cdot c_1 + (d \cdot a_2 + e \cdot b_2) \cdot c_2 + (d \cdot a_3 + e \cdot b_3) \cdot c_3
\end{aligned}$$

Im folgenden Schritt verwenden wir das Distributivgesetz und multiplizieren aus.

$$\begin{aligned}
& (d \cdot a_1 + e \cdot b_1) \cdot c_1 + (d \cdot a_2 + e \cdot b_2) \cdot c_2 + (d \cdot a_3 + e \cdot b_3) \cdot c_3 \\
= \; & d \cdot a_1 \cdot c_1 + e \cdot b_1 \cdot c_1 + d \cdot a_2 \cdot c_2 + e \cdot b_2 \cdot c_2 + d \cdot a_3 \cdot c_3 + e \cdot b_3 \cdot c_3
\end{aligned}$$

Jetzt machen wir abermals vom Distributivgesetz Gebrauch und heben die Zahlen d und e wie folgt heraus.

$$\begin{aligned}
& d \cdot a_1 \cdot c_1 + e \cdot b_1 \cdot c_1 + d \cdot a_2 \cdot c_2 + e \cdot b_2 \cdot c_2 + d \cdot a_3 \cdot c_3 + e \cdot b_3 \cdot c_3 \\
= \; & d \cdot (a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3) + e \cdot (b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3)
\end{aligned}$$

Bei der Summe $a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3$ beziehungsweise $b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3$ handelt es sich um das Standardskalarprodukt $\langle A, C \rangle$ beziehungsweise $\langle B, C \rangle$. Daher gilt nun

$$\begin{aligned}
& d \cdot (\underbrace{a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3}_{=\langle A,C \rangle}) + e \cdot (\underbrace{b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3}_{\langle B,C \rangle}) \\
= \; & d \cdot \langle A, C \rangle + e \cdot \langle B, C \rangle
\end{aligned}$$

Dadurch konnten wir die dritte Eigenschaft des Skalarproduktes beweisen. □

Nun kommen wir noch zu einer sehr wichtigen Eigenschaft unseres Standardskalarproduktes, derer Nutzung nicht nur für die Herleitung des Konzepts des "Fußpunkt des Lotes" sondern auch im Zuge der Beweise im Hauptteil unverzichtbar ist.
Es seien A und B zwei Punkte eines euklidischen Raumes, deren Geraden durch 0 aufeinander normal stehen. Dann gilt:

$$\langle A, B \rangle = 0$$

Zusammenfassend ist das Standardskalarprodukt zweier Punkte, welche zwei zueinander normalstehende Geraden erzeugen, immer gleich 0. Diese Eigenschaft zu beweisen macht nicht viel Sinn, da sie eng mit der Herleitung und Definition des Skalarproduktes verbunden ist. Darauf werden wir auch nicht weiter eingehen, da wir uns sonst noch näher mit den Inhalten der linearen Algebra auseinandersetzen müssten.

So konnten wir uns nun alles erarbeiten, was wir bezüglich Skalarprodukte wissen müssen.

7. Vier Hilfssätze

In diesem Kapitel sollen vier Hilfssätze, sogenannte Lemmata, besprochen und bewiesen werden. Diese Lemmata zeigen nützliche Zusatzinformationen und Zusammenhänge zwischen Vektorprodukte, Determinanten und Skalarprodukte auf. Diese Zusatzinformationen werden uns einige Beweise in den nächsten großen Teilen erleichtern.

7.1. Lemma 1

Für zwei Punkte im dreidimensionalen Raum $A, B \in \mathbb{R}^3$, soll folgendes gelten.

$$A \times B = -(B \times A)$$

Beweis. Durch einfaches Nachrechnen können wir die Gleichung beweisen. Dabei starten wir von der linken Seite der Gleichung und versuchen durch ausgewählte Rechenschritte eine Gleichheitskette zu der rechten Seite der Gleichung zu bilden.
Zu Beginn werden wir die Punkte A und B als Tripel ihrer Einträge schreiben, um das Vektorprodukt leichter berechnen zu können.

$$A \times B \overset{A,B\in\mathbb{R}^3}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt wenden wir das Distributivgesetz an und heben (-1) von jedem der drei Einträge heraus.

$$\begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \overset{\text{herausheben}}{=} \begin{pmatrix} (-1) \cdot (a_3 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_3) \\ (-1) \cdot (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ (-1) \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \end{pmatrix}$$

Weiters können wir jetzt die Definition der Skalarmultiplikation verwenden, um so (-1) "herauszuziehen"

$$\begin{pmatrix} (-1) \cdot (a_3 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_3) \\ (-1) \cdot (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ (-1) \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \end{pmatrix} \overset{\text{Skalarmultiplikation}}{=} (-1) \cdot \begin{pmatrix} a_3 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

Nachdem wir die Faktoren paarweise, mithilfe des Kommutativgesetzes, vertauscht haben, erkennen wir die Möglichkeit, die Definition des Vektorproduktes abermals zielbringend einzusetzen.

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} a_3 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \end{pmatrix} \overset{\text{vertauschen}}{=} (-1) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_2 \cdot a_3 - b_3 \cdot a_2 \\ b_3 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_3 \\ b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1 \end{pmatrix}}_{=B\times A}$$

$$\overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} (-1) \cdot (B \times A) = -(B \times A)$$

Daher gilt für alle Punkte A und B aus dem $\mathbb{R}^2$ die Gleichung $A \times B = -(B \times A)$ $\square$

7.2. Lemma 2

Für drei Punkte im dreidimensionalen Raum $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, soll folgendes gelten.

$$\langle A \times B, C \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =: \det(A, B, C)$$

Beweis. Wie beim vorherigen Lemma, erhält man den Beweis durch einfaches Nachrechnen. Zu Beginn verwendet man die Definition des Vektorprodukts für $A \times B$.

$$\langle A \times B, C \rangle \overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ b_1a_3 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}, C \right\rangle$$

Nach diesem Schritt berechnen wir das Skalarprodukt, indem wir die Definition des Skalarproduktes (abgekürzt Skp.) benützen.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ b_1a_3 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=C} \right\rangle \overset{\text{Def.Skp.}}{=} (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot c_1 + (b_1a_3 - a_1b_3) \cdot c_2 + (a_1b_2 - b_1a_2) \cdot c_3$$

Nun verwenden wir das Verteilungsgesetz, welches auch Distributivgesetz genannt wird, und multiplizieren aus.

$$\begin{aligned} & (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot c_1 + (b_1a_3 - a_1b_3) \cdot c_2 + (a_1b_2 - b_1a_2) \cdot c_3 \\ \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \; & a_2b_3c_1 - c_1a_3b_2 + b_1a_3c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 \end{aligned}$$

Nun erhält man eine Summe, derer Summanden Produkte sind. Anschließend werden diese neu angeordnet. Dabei vertauschen wir auch zusätzlich die Faktoren der Produkte. Zum Beispiel wird aus $a_2b_3c_1$ dann $c_1a_2b_3$.

$$\begin{aligned} & a_2b_3c_1 - c_1a_3b_2 + b_1a_3c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 \\ \overset{\text{neu anordnen}}{=} \; & a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \end{aligned}$$

Es lässt sich jetzt leichter erkennen, dass die Summe genau die Determinante von der

Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ ist.

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \overset{\text{Def. Determinante}}{=} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Schlussendlich haben wir durch Anwendung erlaubter Rechenregeln und bekannten Definitionen eine Gleichheitskette hergestellt. So haben wir das Skalarprodukt vom Anfang in eine Determinante umgeschrieben. Daher gilt also:

$$\langle A \times B, C \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det (A, B, C)$$

□

7.3. Lemma 3

Für drei Punkte im dreidimensionalen Raum $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ soll folgendes gelten.

$$\langle A, C \rangle \cdot B - \langle B, C \rangle \cdot A = (A \times B) \times C$$

Beweis. Auch dieses Resultat wird durch Nachrechnen gezeigt. Nachdem man sich vergewissert hat, dass Punkte im dreidimensionalen Raum Zahlentripel sind, berechnet man das Skalarprodukt $\langle A, C \rangle$ und $\langle B, C \rangle$.

$$\begin{aligned} & \langle A, C \rangle \cdot B - \langle B, C \rangle \cdot A \\ \overset{A,B,C \in \mathbb{R}^3}{=} & \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ \overset{\text{Skp. berechnen}}{=} & (a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da es sich bei Skalarprodukte um reelle Zahlen handelt, können diese komponentenweise mit den Punkten B und A multipliziert werden.

$$
\begin{aligned}
&(a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
\overset{\text{Skalarmultiplikation}}{=} &\begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot b_1 \\ (a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot b_2 \\ (a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot a_1 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot a_2 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot a_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nach dem Ausmultiplizieren, erhält man durch komponentenweises Subtrahieren einen neuen Punkt. Zusätzlich werden die Faktoren der Summanden so angeordnet, sodass der erste Faktor immer eine Komponente von A, der zweite Faktor eine Komponente von B und der dritte Faktor eine Komponente von C ist. Zum Beispiel wird aus $a_2c_2b_1$ nach Tausch der Reihenfolge der Faktoren $a_2b_1c_2$.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot b_1 \\ (a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot b_2 \\ (a_1c_1 + a_2b_2 + a_3c_3) \cdot b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot a_1 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot a_2 \\ (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot a_3 \end{pmatrix} \\
\overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} &\begin{pmatrix} a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 \\ a_1c_1b_2 + a_2c_2b_2 + a_3c_3b_2 \\ a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 + a_3c_3b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1c_1a_1 + b_2c_2a_1 + b_3c_3a_1 \\ b_1c_1a_2 + b_2c_2a_2 + b_3c_3a_2 \\ b_1c_1a_3 + b_2c_2a_3 + b_3c_3a_3 \end{pmatrix} \\
\overset{\text{komp. Subtrahieren}}{=} &\begin{pmatrix} \cancel{a_1b_1c_1} + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - \cancel{a_1b_1c_1} - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3 \\ a_1b_2c_1 + \cancel{a_2b_2c_2} + a_3b_2c_3 - a_2b_1c_1 - \cancel{a_2b_2c_2} - a_2b_3c_3 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + \cancel{a_3b_3c_3} - a_3b_1c_1 - a_3b_2c_2 - \cancel{a_3b_3c_3} \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_3b_1c_1 - a_3b_2c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nachdem man die Summanden der drei Komponenten neu angeordnet hat, werden die Komponenten von C, also c_1, c_2 und c_3, wie folgt herausgehoben.

$$\begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_2c_2 - a_1b_3c_3 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_3b_1c_1 - a_3b_2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{anordnen}}{=} \begin{pmatrix} b_1a_3c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + b_1a_2c_2 \\ a_1b_2c_1 - b_1a_2c_1 - a_2b_3c_3 + b_2a_3c_3 \\ a_2b_3c_2 - b_2a_3c_2 - b_1a_3c_1 + a_1b_3c_1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{herausheben}}{=} \begin{pmatrix} (b_1a_3 - a_1b_3) \cdot c_3 - (a_1b_2 - b_1a_2) \cdot c_2 \\ (a_1b_2 - b_1a_2) \cdot c_1 - (a_2b_3 - b_2a_3) \cdot c_3 \\ (a_2b_3 - b_2a_3) \cdot c_2 - (b_1a_3 - a_1b_3) \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

Nun werden, im Sinne der Übersichtlichkeit, drei Substitutionen vorgenommen. Das bedeutet konkret, dass drei Differenzen einen neuen Namen bekommen. Dadurch ist der übernächste Schritt ersichtlicher.

$$\begin{bmatrix} (a_2b_3 - b_2a_3) =: v_1 \\ (b_1a_3 - a_1b_3) =: v_2 \\ (a_1b_2 - b_1a_2) =: v_3 \end{bmatrix}$$

Demnach erhält man:

$$\begin{pmatrix} (b_1a_3 - a_1b_3) \cdot c_3 - (a_1b_2 - b_1a_2) \cdot c_2 \\ (a_1b_2 - b_1a_2) \cdot c_1 - (a_2b_3 - b_2a_3) \cdot c_3 \\ (a_2b_3 - b_2a_3) \cdot c_2 - (b_1a_3 - a_1b_3) \cdot c_1 \end{pmatrix} \overset{\text{Substitution}}{=} \begin{pmatrix} v_2c_3 - c_2v_3 \\ c_1v_3 - v_1c_3 \\ v_1c_2 - c_1v_2 \end{pmatrix}$$

Durch die Subtitution lässt sich nun leichter erkennen, dass es sich bei dem Punkt $\begin{pmatrix} v_2c_3 - c_2v_3 \\ c_1v_3 - v_1c_3 \\ v_1c_2 - c_1v_2 \end{pmatrix}$ um das Vektorprodukt von $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ handelt. Also:

$$\begin{pmatrix} v_2c_3 - c_2v_3 \\ c_1v_3 - v_1c_3 \\ v_1c_2 - c_1v_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Führt man nun eine Rücksubstitution aus und verwendet nochmal die Definition des Vektorproduktes, erhält man das erwünschte Resultat und hat damit das Lemma 2 bewiesen.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Rücksubstitution}}{=} \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ b_1a_3 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Def. Vektorprodukt}}{=} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (A \times B) \times C$$

$$\Rightarrow \langle A, C \rangle \cdot B - \langle B, C \rangle \cdot A = (A \times B) \times C$$

□

7.4. Lemma 4

Für vier Punkte im dreidimensionalen Raum $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$, soll folgendes gelten.

$$\langle A, C \rangle \cdot \langle B, D \rangle - \langle B, C \rangle \cdot \langle A, D \rangle = \langle (A \times B), (C \times D) \rangle$$

Beweis. Wie bei den vorherigen Lemmatas können wir das erwünschte Resultat durch Nachrechnen erzielen. Zu Beginn verwenden wir vier mal die Definition des Skalarprodukts.

$$\langle A, C \rangle \cdot \langle B, D \rangle - \langle B, C \rangle \cdot \langle A, D \rangle$$

$$\overset{A,B,C,D \in \mathbb{R}^3}{=} \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\overset{\text{Skp.}}{=} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \cdot (b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)$$

Ausmultiplizieren führt hier dazu, dass man anschließend einige Summanden der entstandenen Summe streichen kann.

$$\begin{aligned} & (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \cdot (b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) \\ & -(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) \\ \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} & \cancel{a_1c_1b_1d_1} + a_1c_1b_2d_2 + a_1c_1b_3d_3 + a_2c_2b_1d_1 \\ & + \cancel{a_2c_2b_2d_2} + a_2c_2b_3d_3 + a_3c_3b_1d_1 + a_3c_3b_2d_2 + \cancel{a_3c_3b_3d_3} \\ & -(\cancel{b_1c_1a_1d_1} + b_1c_1a_2d_2 + b_1c_1a_3d_3 + b_2c_2a_1d_1 \\ & + \cancel{b_2c_2a_2d_2} + b_2c_2a_3d_3 + b_3c_3a_1d_1 + b_3c_3a_2d_2 + \cancel{b_3c_3a_3d_3}) \end{aligned}$$

Nun werden die Summanden neu angeordnet.

$$\begin{aligned} & a_1c_1b_2d_2 + a_1c_1b_3d_3 + a_2c_2b_1d_1 + a_2c_2b_3d_3 + a_3c_3b_1d_1 + a_3c_3b_2d_2 \\ & -(b_1c_1a_2d_2 + b_1c_1a_3d_3 + b_2c_2a_1d_1 + b_2c_2a_3d_3 + b_3c_3a_1d_1 + b_3c_3a_2d_2) \\ \overset{\text{anordnen}}{=} & a_2b_3c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_2c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 \\ & + a_3b_1c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 - a_1b_3c_3d_1 + a_1b_3c_1d_3 \\ & + a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 \end{aligned}$$

Der nächste Schritt ist nicht sofort ersichtlich. Man kann sich aber leicht von der Richtigkeit überzeugen in dem man eine Probe ausführt. Wenn man bei der nächsten Gleichung die rechte Seite der Gleichung ausmultipliziert, erhält man die linke Seite.

$$\begin{aligned} &a_2b_3c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_2c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 \\ +&a_3b_1c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 - a_1b_3c_3d_1 + a_1b_3c_1d_3 \\ +&a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 \end{aligned}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot (c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot (c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1d_2 - c_2d_1)$$

Bei der erhaltenen Summe handelt es sich um ein Skalarprodukt.

$$(a_2b_3 - a_3b_2) \cdot (c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot (c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1d_2 - c_2d_1)$$

$$\overset{\text{Skp.}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ b_1a_3 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ d_1c_3 - d_3c_1 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nach zweifacher Anwendung der Definition des Vektorproduktes hat man das Lemma 4 bewiesen.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ b_1a_3 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ d_1c_3 - d_3c_1 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{\text{Vektorprodukt}}{=} \langle (A \times B), (C \times D \rangle$$

$$\Rightarrow \langle A, C\rangle \cdot \langle B, D\rangle - \langle B, C\rangle \cdot \langle A, D\rangle = \langle (A \times B), (C \times D)\rangle$$

□

Zusammenfassend möchte ich die bewiesenen Lemmata nochmal auflisten.

Es gilt also nun für $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$:

$$A \times B = -(B \times A) \qquad \text{(Lemma 1)}$$

$$\langle A \times B, C\rangle = \det(A, B, C) \qquad \text{(Lemma 2)}$$

$$\langle A, C\rangle \cdot B - \langle B, C\rangle \cdot A = (A \times B) \times C \qquad \text{(Lemma 3)}$$

$$\langle A, C\rangle \cdot \langle B, D\rangle - \langle B, C\rangle \cdot \langle A, D\rangle = \langle (A \times B), (C \times D)\rangle \qquad \text{(Lemma 4)}$$

8. Normen

Im Schulunterricht hat man regelmäßig mit Normen zu tun. Dennoch werden diese meiner Meinung nach, obwohl ihre Wichtigkeit in der Mathematik außer Frage steht, nicht gründlich genug eingeführt. Aus diesem Grund möchte ich in diesem Kapitel klären, wie Normen eigentlich genau definiert sind. Zusätzlich möchte ich zwei Normen aufgreifen, welche wir im Hauptteil benötigen.

Bevor wir jedoch dazu kommen können, ist es meines Erachtens sinnvoll, die reelle Betragsfunktion einzuführen. Weiters benötigen wir im Zusammenhang mit Normen die Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung. Auch diese soll formuliert und bewiesen werden.

8.1. Betragsfunktion

Definition 5. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{R} &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto |x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

nennen wir reelle Betragsfunktion oder einfach nur Betragsfunktion.

Sie bildet jede positive reelle Zahl auf sich selbst ab und multipliziert jede negative reelle Zahl mit (-1). Bei einer positiven Zahl ändert sich dementsprechend nichts, wohingegen die Funktion einer negativen Zahl das Vorzeichen nimmt. So ist beispielsweise $|4| = 4$ und $|-6| = 6$.

8.2. Definition und Beispiele

Nun kommen wir zur Definition einer Norm:

Definition 6. *Es sei V ein reeller Vektorraum. Die Funktion*

$$\|\cdot\| : \ V \to [0,\infty)$$

*heißt **Norm** auf V, falls für alle $v, w \in V$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt, dass:*

(N1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Man definiert demnach eine Norm über drei Eigenschaften. Man nennt also jede Funktion, welche einen Vektor auf eine positive reelle Zahl abbildet und welche die beschriebenen drei Eigenschaften besitzt, eine Norm.

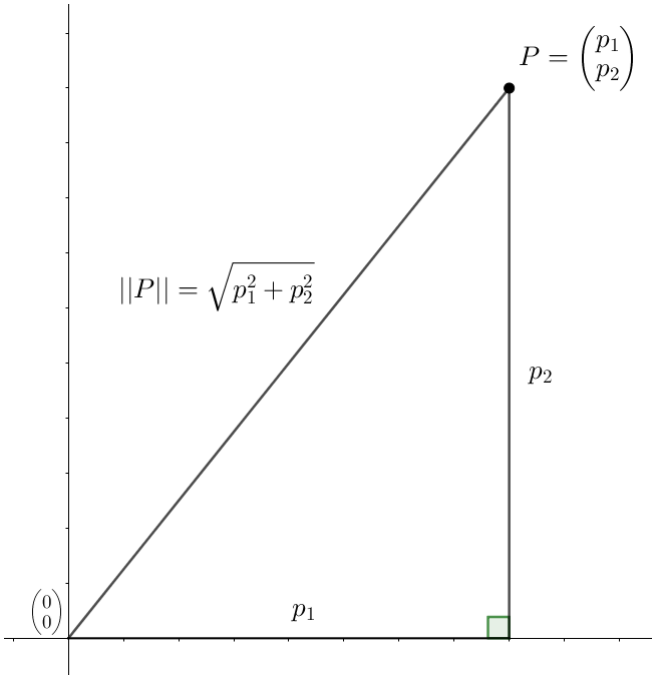


Abbildung 6: Euklidische Norm

Die Funktion

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^2 &\to [0, \infty) \\ P &\mapsto \|P\| := \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \end{aligned}$$

bildet einen Punkt in der Ebene auf seinen kürzesten Abstand zum Nullpunkt ab. Das kann man sich im zweidimensionalen Raum leicht überlegen. Der Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ besitzt den Normalabstand p_1 zur y-Achse und den Normalabstand p_2 zur x-Achse. Nun kann man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten p_1 sowie p_2 und mit der Strecke von P zum Nullpunkt als Hypotenuse einzeichnen. Laut Pythagoras ist die Länge dieser Hypotenuse nun $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. Die Länge der Hypotenuse ist wie schon erwähnt der kürzeste Abstand vom Nullpunkt zum Punkt P. Zu diesen Überlegungen dient die Abbildung 6 auf Seite 40. Jedenfalls nennt man diese Funktion euklidische Norm. Wie der Name vielleicht schon verrät, handelt es sich bei dieser Funktion um eine Norm für Punkte im zweidimensionalen Raum.
Diese Behauptung werden wir bald verifizieren. Dazu benötigen wir jedoch die Cauchy - Schwarzsche Ungleichung, welche wir nun behandeln werden.

8.3. Cauchy - Schwarz - Ungleichung

Im Allgemeinen wird die Cauchy - Schwarz - Ungleichung als Satz im $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Da wir jedoch das Standartskalarprodukt benötigen, welches wir im Sinne der Einfachheit, nur für den zwei - und dreidimensionalen reellen Vektorraum definiert haben, werde ich auch die Allgemeinheit der Ungleichung beschränken. Ich werde nun, wie folgt, den Satz im $\mathbb{R}^2$ behandeln und darauf hinweisen, dass der Satz analog für den $\mathbb{R}^3$ formuliert und bewiesen werden kann.

Satz 4 (Cauchy - Schwarz - Ungleichung)**.**

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2 : \langle A, B\rangle \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Beweis. [htt] Wir werden den Beweis dieser Ungleichung in zwei Teile aufteilen. Der eigentliche Beweis wird im zweiten Teil stattfinden. Es wird für den zweiten Teil jedoch ein Zwischenergebnis gebraucht, welches wir im ersten Teil erarbeiten.

Teil 1 Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ mit $|A| = |B| = 1$.
Aufgrund der Positivität des Skalarproduktes gilt folgende Ungleichung.

$$\langle A - B, A - B\rangle \overset{\text{Positivität}}{\geq} 0$$

Im nächsten Schritt verwenden wir die Bilinearität des Skalarproduktes.

$$\begin{aligned} &\langle A - B, A - B\rangle \geq 0 \\ \overset{\text{Bilinearität}}{\Leftrightarrow}\ &\langle A, A\rangle - \langle A, B\rangle - \langle B, A\rangle + \langle B, B\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt symmetrisch ist, gilt daher $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$. Diese Eigenschaft werden wir im nächsten Schritt ausnützen.

$$\begin{aligned} &\langle A, A\rangle - \langle A, B\rangle - \langle B, A\rangle + \langle B, B\rangle \geq 0 \\ \overset{\text{Symmetrie}}{\Leftrightarrow}\ &\langle A, A\rangle - \langle A, B\rangle - \langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &\langle A, A\rangle - 2 \cdot \langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Skalarprodukte $\langle A, A\rangle$ und $\langle B, B\rangle$ geschickt umschreiben. Dazu schreiben wir die Punkte A und B als Paare ihrer Einträge. Somit geht uns die Berechnung der Skalarprodukte leichter von der Hand. Schlussendlich können wir dann einen nützlichen Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und euklidischer Norm erkennen und verwenden.

$$\begin{aligned} &\langle A, A\rangle - 2 \cdot \langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle \geq 0 \\ \overset{A,B\in\mathbb{R}^2}{\Leftrightarrow}\ &\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle - 2 \cdot \langle A, B\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0 \\ \overset{\text{Skp. berechnen}}{\Leftrightarrow}\ &\underbrace{(a_1^2 + a_2^2)}_{=\|A\|^2} - 2 \cdot \langle A, B\rangle + \underbrace{(b_1^2 + b_2^2)}_{=\|B\|^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Wir haben für die Punkte A und B vorausgesetzt, dass ihr Abstand zum Nullpunkt genau 1 ist. Also gilt $\|A\| = \|B\| = 1$. Daher ist $\|A\|^2 = \|B\|^2 = 1^2 = 1$. In unserer Ungleichung eingesetzt, ergibt diese Substitution folgendes.

$$\begin{aligned}
&\|A\|^2 - 2 \cdot \langle A, B\rangle + \|B\|^2 \geq 0 \\
\overset{\|A\|^2=\|B\|^2=1}{\Leftrightarrow}\ &1 - 2 \cdot \langle A, B\rangle + 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ &2 - 2 \cdot \langle A, B\rangle \geq 0 \\
\overset{2 \text{ herausheben}}{\Leftrightarrow}\ &2 \cdot (1 - \langle A, B\rangle) \geq 0 \\
\overset{:2}{\Leftrightarrow}\ &1 - \langle A, B\rangle \geq 0 \\
\overset{+\langle A,B\rangle}{\Leftrightarrow}\ &1 \geq \langle A, B\rangle
\end{aligned}$$

Für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$ mit $\|A\| = \|B\| = 1$ gilt demnach nun, dass deren Skalarprodukt kleiner gleich 1 ist. Also:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2 \text{mit}\, \|A\| = \|B\| = 1 : \langle A, B\rangle \leq 1$$

So können wir nun zum zweiten Teil übergehen.

Teil 2 In diesem zweiten Teil möchten wir nun mithilfe des Resultats aus dem ersten Teil die Aussage des Satzes, nämlich "$\forall A, B \in \mathbb{R}^2 : \langle A, B\rangle \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ", beweisen.
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$. Ausgehend vom Skalarprodukt $\langle A, B\rangle$ wollen wir nun eine Ungleichungskette bilden und zu $\|A\| \cdot \|B\|$ gelangen. Im ersten Schritt erweitern wir A beziehungsweise B geschickt mit $\frac{\|A\|}{\|A\|}$ beziehungsweise mit $\frac{\|B\|}{\|B\|}$.

$$\langle A, B\rangle = \left\langle A \cdot \underbrace{\frac{\|A\|}{\|A\|}}_{=1}, B \cdot \underbrace{\frac{\|B\|}{\|B\|}}_{=1} \right\rangle$$

Nun werden wir wieder die **Bilinearität** des Skalarproduktes nützen und so einmal $\|A\|$ und $\|B\|$ aus dem Skalarprodukt "herausziehen".

$$\left\langle A \cdot \underbrace{\frac{\|A\|}{\|A\|}}_{=1}, B \cdot \underbrace{\frac{\|B\|}{\|B\|}}_{=1} \right\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \|A\| \cdot \|B\| \cdot \left\langle \frac{A}{\|A\|}, \frac{B}{\|B\|} \right\rangle$$

Nun sind wir an dem Punkt angelangt, das Resultat aus dem ersten Teil nützen zu können. Dazu stellen wir noch eine wichtige Überlegung an. Was bedeutet denn $\frac{A}{\|A\|}$? Der Punkt A wird durch seinen Abstand zum Nullpunkt nämlich $\|A\|$ geteilt. Der neue Punkt $\frac{A}{\|A\|}$ liegt zwar noch auf der selben Gerade, die durch A und dem Nullpunkt hindurchgeht, jedoch besitzt dieser Punkt nun den Abstand 1 zum Nullpunkt.
Da nun $\left\|\frac{A}{\|A\|}\right\| = \left\|\frac{B}{\|B\|}\right\| = 1$ ist, gilt laut Teil 1 nun $\left\langle \frac{A}{\|A\|}, \frac{B}{\|B\|} \right\rangle \leq 1$.

$$\|A\| \cdot \|B\| \cdot \underbrace{\left\langle \frac{A}{\|A\|}, \frac{B}{\|B\|} \right\rangle}_{\leq 1} \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot 1 = \|A\| \cdot \|B\|$$

□

Es gilt nun also

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2 : \langle A, B \rangle \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Dieser Satz gilt auch für dreidimensionale Punkte aus dem $\mathbb{R}^3$. Der Beweis dazu verläuft komplett analog zum Beweis des zweidimensionalen Falles. Auch die Definition der euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^3$ verläuft analog.

8.4. Euklidische Norm

In diesem Unterkapitel wollen wir nun testen, ob es sich bei der euklidischen Norm tatsächlich um eine Norm handelt. Dazu überprüfen wir ihren Definitionsbereich und die drei Eigenschaften einer Norm.
Wie schon erklärt wurde, handelt es sich bei zweidimensionale Punkte um Vektoren. Somit ist der $\mathbb{R}^2$ ein Vektorraum und es müssen nur mehr die drei Eigenschaften N1, N2 und N3 überprüft werden.

(N1) Zur Überprüfung der ersten Eigenschaft nehmen wir an, dass die Norm vom Punkt A gleich 0 ist, also dass $\|A\| = 0$. Daraus wollen wir nun folgern, dass A der Nullpunkt sein muss. Zu Beginn wenden wir einfach die Definition der euklidischen Norm auf A an.

$$\begin{aligned} \|A\| &= 0 \\ \overset{\text{Definition}}{\Rightarrow} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

Die Wurzel einer Zahl ist immer jene positive Zahl, deren Quadrat die ursprüngliche Zahl ist. Und da $0 \cdot 0 = 0$ gilt, ist demnach also $\sqrt{0} = 0$. Es kann auch keine andere Zahl geben, deren Wurzel 0 ergibt. Die Wurzelfunktion ist nämlich eine streng monoton wachsende Funktion. Daher werden unterschiedliche Argumente auf unterschiedliche Funktionswerte abgebildet. Das bedeutet, dass kein Argument auf den Funktionswert eines anderen Arguments abgebildet wird. Bei der Wurzelfunktion wird also nur ein Argument auf die 0 abgebildet und zwar die 0 selbst.

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} &= 0 \\ \overset{\sqrt{0}=0}{\Rightarrow} a_1^2 + a_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Nun haben wir eine Summe von Quadraten erhalten, die 0 ergeben muss! Da Quadrate immer positiv sind, kann die Summe nur dann 0 werden, wenn alle Quadrate 0 sind.

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 0 \\ \overset{a_1^2, a_2^2 \geq 0}{\Rightarrow} a_1^2 = a_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ein Quadrat einer reellen Zahl ist genau dann 0, falls die reelle Zahl selbst 0 ist.

$$a_1^2 = a_2^2 = 0$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Dadurch konnten wir zeigen, dass beide Einträge von A gleich 0 sind. Somit ist A der Nullpunkt.

$$a_1 = a_2 = 0$$
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Falls die Norm von A gleich 0 ist, so folgt daraus, dass A der Nullpunkt sein muss. Mathematisch ausgedrückt, gilt nun also:

$$\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

Die Eigenschaft $(N1)$ lässt sich durch eine geometrische Interpretation eindrücklich plausibilisieren. Für einen Punkt A bedeutet $\|A\| = 0$, dass der Abstand des Punktes A zum Nullpunkt gerade 0 ist. Ein Punkt der keinen Abstand zum Nullpunkt hat, muss der Nullpunkt selbst sein.

Die euklidische Norm erfüllt also die erste Eigenschaft $(N1)$ einer Norm.

(N2) Auch die zweite Eigenschaft einer Norm gilt es zu überprüfen. Für den zweidimensionalen Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ und der reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ soll nun

$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$

gelten.

Im ersten Rechenschritt erinnern wir uns daran, dass der Punkt A zweidimensional ist und schreiben ihn anschließend als Paar seiner Einträge.

$$\|c \cdot A\| \overset{A \in \mathbb{R}^2}{=} \left\| c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\|$$

Da $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl ist, können wir zweitens eine komponentenweise Skalarmultiplikation ausführen. Zur Erinnerung multiplizieren wir c einfach mit jeder Komponente von A.

$$\left\| c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| \overset{\text{Skalarmultiplikation}}{=} \left\| \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \end{pmatrix} \right\|$$

Im dritten Schritt verwenden wir einfach die, vorher beschriebene, Definition der Norm eines zweidimensionalen Punktes.

$$\left\| \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \end{pmatrix} \right\| \overset{\text{Definition } \|\cdot\|}{=} \sqrt{(c \cdot a_1)^2 + (c \cdot a_2)^2}$$

Nun werden wir die reellen Zahlen unter der Wurzel ausquadrieren.

$$\sqrt{(c \cdot a_1)^2 + (c \cdot a_2)^2} = \sqrt{c^2 \cdot a_1^2 + c^2 \cdot a_2^2}$$

Da nun unter der Wurzel eine Summe steht, deren Summanden alle ein c^2 beinhalten, können wir nun das Distributiv - oder Verteilungsgesetz anwenden und c^2 herausheben.

$$\sqrt{c^2 \cdot a_1^2 + c^2 \cdot a_2^2} \overset{\text{Herausheben}}{=} \sqrt{c^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2)}$$

Im nächsten Rechenschritt werden wir von einer nützlichen Eigenschaft der Quadratwurzelfunktion Gebrauch machen. Es gilt nämlich, dass die Wurzel eines Produktes gleich dem Produkt der Wurzeln der Faktoren ist. Diese Eigenschaft klingt in Worten ein wenig kompliziert. Mathematisch notiert, könnte man diese Regel so umschreiben: $\sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n} = \sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} \cdot \ldots \cdot \sqrt{z_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n \in \mathbb{R}$. In unserer Rechnung setzen wir diese Eigenschaft wie folgt ein.

$$\sqrt{c^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2)} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Nun wollen wir uns überlegen, was es mit $\sqrt{c^2}$ auf sich hat. Wie schon einmal, vor einigen Rechenschritten erwähnt, handelt es sich bei der Wurzel einer Zahl um jene **positive** Zahl, die mit sich selbst multipliziert, die ursprüngliche Zahl ergibt. Somit könnte man nun intuitiv $\sqrt{c^2} = c$ annehmen, weil $c \cdot c = c^2$. Es gilt jedoch zu beachten, dass c nicht positiv sein muss. In diesem Fall wäre $\sqrt{c^2} = -c$. Um diesem Problem schnell ausweichen zu können, nehmen wir als Lösung einfach den Betrag von c.

$$\sqrt{c^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \overset{\sqrt{c^2}=|c|}{=} |c| \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Schlussendlich verwenden wir nochmal die Definition unserer Norm für zweidimensionale Punkte und konnten so die zweite Eigenschaft von Normen für die euklidische Norm nachweisen.

$$|c| \cdot \underbrace{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}_{=\|A\|} = |c| \cdot \|A\|$$

Es gilt also:

$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$

(N3) An dieser Stelle werden wir nun die dritte und letzte nötige Eigenschaft, welche Dreiecksungleichung genannt wird, überprüfen.

Dazu sei $A, B \in \mathbb{R}^2$.

Wir betrachten zu Beginn jedoch nicht $\|A+B\|$, sondern wir sehen uns das Quadrat davon $\|A+B\|^2$ an.
Im ersten Schritt schreiben wir die Punkte A und B wieder als Paare ihrer Einträge.

$$\|A+B\|^2 \overset{A,B\in\mathbb{R}^2}{=} \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

Im zweiten Schritt addieren wir die beiden Punkte in der Norm komponentenweise.

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \overset{\text{komp. Addition}}{=} \left\| \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

Anschließend verwenden wir die Definition von der euklidischen Norm.

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \overset{\text{Def.}\|\cdot\|}{=} \left(\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \right)^2$$

Wie schon erwähnt, ist die Wurzel einer Zahl jene positive Zahl, die quadriert wieder die ursprüngliche Zahl ergibt. Im nächsten Schritt werden wir von der Zahl $(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2$ die Wurzel ziehen und sie daraufhin wieder quadrieren. Wie man vielleicht erkennen kann, wird sich dann nichts verändern, beziehungsweise kann man erkennen, dass sich das Wurzelziehen und das Quadrieren gegenseitig aufheben.

$$\left(\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \right)^2 = (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2$$

Bei dieser Summe von Quadraten, die wir nun erhalten haben, handelt es sich genau um das Standardskalarprodukt des Punktes $\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$ mit sich selbst.

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2 \overset{\text{Def. Skp}}{=} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}}_{=(A+B)}, \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle (A+B), (A+B) \rangle$$

Nun können wir die Bilinearität des Skalarproduktes verwenden.

$$\langle (A+B), (A+B) \rangle = \langle A, A \rangle + \langle A, B \rangle + \langle B, A \rangle + \langle B, B \rangle$$

Dank der Symmetrie des Skalarproduktes gilt $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$. Dieses Resultat werden wir im nächsten Schritt verwenden.

$$\langle A, A \rangle + \langle A, B \rangle + \langle B, A \rangle + \langle B, B \rangle \overset{\text{Skp. symmetrisch}}{=} \langle A, A \rangle + \langle A, B \rangle + \langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle$$
$$= \langle A, A \rangle + 2 \cdot \langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle$$

Für den Punkt $A+B$ haben wir in den letzten Rechenschritten sehen können, dass die Gleichung $\|A+B\|^2 = \langle (A+B),(A+B)\rangle$ gilt. Da A und B beliebige Punkte aus dem$\mathbb{R}^2$ sind, ist folglich auch $A+B$ ein beliebiger Punkt aus dem $\mathbb{R}^2$. Somit gilt auch für alle anderen zweidimensionalen reellen Punkte diese Gleichung. Also

$$\forall P \in \mathbb{R}^2 : \|P\|^2 = \langle P, P\rangle$$

Diese Aussage lässt sich durch Nachrechnen schnell überprüfen. Nun wollen wir diese für unseren nächsten Schritt nützen.

$$\langle A,A\rangle + 2\cdot\langle A,B\rangle + \langle B,B\rangle \overset{\text{Resultat}}{=} \|A\|^2 + 2\cdot\langle A,B\rangle + \|B\|^2$$

Nun werden wir mithilfe der Cauchy - Schwarz'schen Ungleichung das Skalarprodukt $\langle A,B\rangle$ mit $\|A\|\cdot\|B\|$ abschätzen.

$$\|A\|^2 + 2\cdot \underbrace{\langle A,B\rangle}_{\leq \|A\|\cdot\|B\|} + \|B\|^2 \overset{\text{Cauchy - Schwarz}}{\leq} \|A\|^2 + 2\cdot\|A\|\cdot\|B\| + \|B\|^2$$

Im vorletzten Schritt des Beweises können wir nun vom binomischen Lehrsatz Gebrauch machen.

$$\|A\|^2 + 2\cdot\|A\|\cdot\|B\| + \|B\|^2 \overset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} (\|A\| + \|B\|)^2$$

Somit ist es uns gelungen eine Ungleichungskette, von $\|A+B\|^2$ ausgehend, nach $(\|A\| + \|B\|)^2$ zu legen. Somit gilt nun

$$\forall A,B \in \mathbb{R}^2 : \|A+B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$$

Da beide Seiten dieser Ungleichung aufgrund der Quadrate positiv sind, können wir ohne weitere Bedenken die Wurzel ziehen. In diesem Fall ist das Wurzelziehen nämlich eine Äquivalenzumformung.

$$\begin{aligned} &\forall A,B \in \mathbb{R}^2 : \|A+B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2 \\ \overset{\surd}{\Leftrightarrow}\ &\forall A,B \in \mathbb{R}^2 : \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Und somit konnten wir nun (N3) für die euklidische Norm nachweisen. Es handelt sich bei dieser Funktion demnach wirklich um eine Norm.

Wir haben die euklidische Norm nur für den zweidimensionalen Raum definiert. Wir können diese Funktion auch ganz allgemein für den n-dimensionalen Raum für $n \in \mathbb{N}$ definieren und nachweisen, dass es sich dabei um eine Norm handelt. Im Sinne der Einfachheit halte ich davon jedoch Abstand. Ich möchte die euklidische Norm lediglich für den dreidimensionalen Raum definieren.
Die Funktion

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^3 &\to [0,\infty) \\ P &\mapsto \|P\| := \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \end{aligned}$$

ist auch eine Norm für dreidimensionale Punkte. Der Beweis für diese Aussage verläuft analog zum zweidimensionalen Pendant.

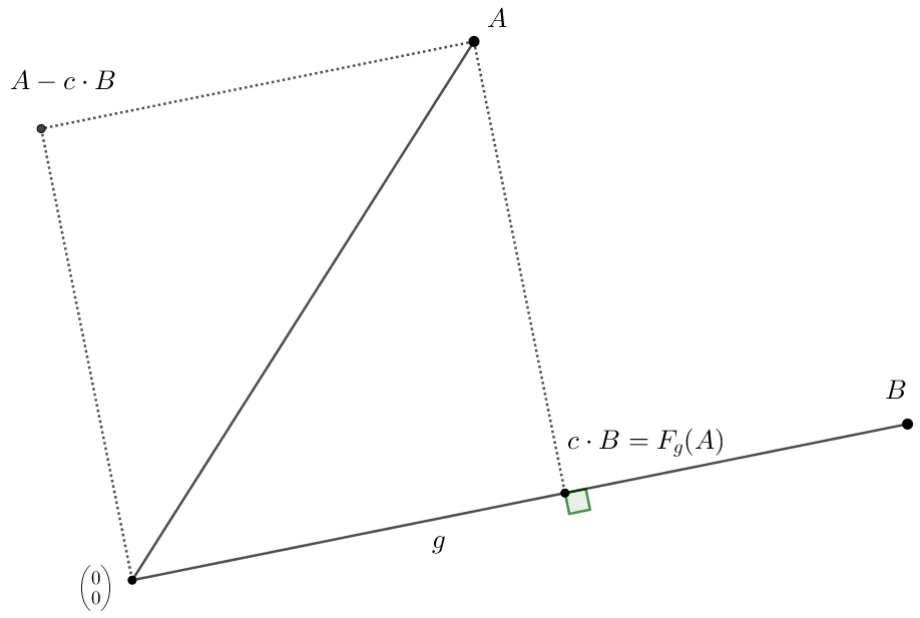


Abbildung 7: Herleitung des Fußpunktes

9. Fußpunkt des Lotes

Um das Konzept von der Entfernung zweier Punkte auf der Einheitskugel verstehen zu können, benötigen wir noch den Begriff des "Fußpunkt des Lotes" im zweidimensionalen Raum. Dieses praktische Hilfsmittel werden wir uns nun im nächsten Kapitel herleiten. Die Abbildung 7 auf Seite 48 stellt eine Skizze der Herleitung dar.
Gegeben ist ein Punkt und eine Gerade in der Ebene. Legt man nun eine weitere Gerade, welche normal zur gegebenen Geraden liegt, durch den gegebenen Punkt, so ist der Schnittpunkt der beiden Geraden der Fußpunkt des Lotes.
Diesen Fußpunkt können wir mithilfe des Standardskalarproduktes hervorragend beschreiben.
Wir kennen zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$ und die Gerade g, welche von B erzeugt wird. Wir möchten den Fußpunkt des Lotes $F_g(A)$ von A auf die Gerade g bestimmen. Die Gerade g enthält den Fußpunkt und wird von B erzeugt. Somit gibt es eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass $c \cdot B = F_g(A)$. Der Punkt $A - c \cdot B$ erzeugt eine Gerade, die normal auf g steht. Daher gilt nun, dass das Skalarprodukt dieser beiden Punkte 0 ergibt. Das ist eine Eigenschaft des Skalarprodukts. Also gilt $\langle B, A - c \cdot B \rangle = 0$. Nun können wir mithilfe

der Bilinearität des Skalarproduktes die reelle Zahl c bestimmen:

$$\begin{aligned} & \langle B, (A - c \cdot B) \rangle = 0 \\ \overset{\text{Bilinearität}}{\Leftrightarrow} \; & \langle B, A \rangle - c \cdot \langle B, B \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \; & \langle B, A \rangle = c \cdot \langle B, B \rangle \end{aligned}$$

Um c nun bestimmen zu können, müssen wir die beiden Seiten der Gleichung durch $\langle B, B \rangle$ teilen. Daher müssen wir uns noch vergewissern, dass das Skalarprodukt $\langle B, B \rangle$ ungleich 0 ist. Wir wissen, dass der Punkt B die Gerade g erzeugt und daher nicht der Nullpunkt sein kann. Ferner besagt die Positivität eines Skalarproduktes, dass "$\forall B \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \langle B, B \rangle > 0$" gilt. Somit ist das Skalarprodukt $\langle B, B \rangle$ ungleich 0 und wir können ohne Bedenken durch $\langle B, B \rangle$ teilen. Demnach gilt also

$$\begin{aligned} & \langle B, A \rangle = c \cdot \langle B, B \rangle \\ \overset{\langle B,B \rangle \neq 0}{\Leftrightarrow} \; & \frac{\langle B, A \rangle}{\langle B, B \rangle} = c \end{aligned}$$

Da wir nun c berechnen können, können wir nun auch den Fußpunkt $F_g(A) = c \cdot B$ bestimmen.

$$F_g(A) = c \cdot B = \underbrace{\frac{\langle B, A \rangle}{\langle B, B \rangle}}_{=c} \cdot B$$

Beispiel:

Wir kennen die beiden Punkte $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Gerade g wird von dem Punkt Q erzeugt. Nun wollen wir den Fußpunkt des Lotes $F_g(P)$ von P auf g berechnen.

$$\begin{aligned} F_g(P) &= \frac{\langle Q, P \rangle}{\langle Q, Q \rangle} \cdot Q = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{8 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{8 \cdot 8 + 3 \cdot 3} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{16 + 15}{64 + 9} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{31}{73} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31 \cdot 8}{73} \\ \frac{31 \cdot 3}{73} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{248}{73} \\ \frac{93}{73} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist $F_g(P) = \begin{pmatrix} \frac{248}{73} \\ \frac{93}{73} \end{pmatrix}$.

10. Kosinus und Skalarprodukt

Nun können wir das Skalarprodukt und die Kosinusfunktion dazu verwenden, den Winkel zwischen zwei Halbgeraden zu beschreiben. Zusätzlich können wir mithilfe dieser Errungenschaft auch den Abstand zweier Punkte auf der Kugel berechnen. In diesem Kapitel möchte ich das Bestimmen von Winkeln und Entfernungen mithilfe des Fußpunkts des Lotes herleiten und erläutern.

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ reelle Punkte in der Ebene. Die Halbgeraden, die vom Nullpunkt ausgehend durch den Punkt A beziehungsweise durch den Punkt B gehen, nennen wir f beziehungsweise g.
Der Winkel zwischen diesen beiden Halbgeraden ist die Länge des kürzeren der beiden Kreisbögen, in welche der Einheitskreis durch die beiden Halbgeraden geteilt wird.[Pau19, S. 104]
Der Schnittpunkt der Halbgeraden f bzw. g mit dem Einheitskreis nennen wir A' bzw. B'. Wir wollen also die Länge des Bogens zwischen A' und B' beschreiben. A' liegt, so wie auch A, auf der Geraden f, besitzt jedoch den Abstand 1 zum Nullpunkt. Daher gilt $A' = \frac{A}{\|A\|}$. Durch die gleiche Überlegung kommen wir auf den Schluss, dass auch $B' = \frac{B}{\|B\|}$ sein muss. Nun berechnen wir den Fußpunkt des Lotes von A' auf g. Dieser ist gegeben durch

$$F_g(A') = \frac{\langle A', B' \rangle}{\langle B', B' \rangle} \cdot B'$$

Im Kapitel 8 "Normen" wurde im Zuge des Beweises von $(N3)$ die Aussage "$\forall P \in \mathbb{R}^2 : \|P\|^2 = \langle P, P \rangle$"begründet und bestätigt. Das hilft uns dabei die Gleichung im nächsten Schritt zu vereinfachen.

$$\begin{aligned} F_g(A') &= \frac{\langle A', B' \rangle}{\langle B', B' \rangle} \cdot B' \\ \overset{\langle B', B' \rangle = \|B'\|^2}{\Leftrightarrow} \quad F_g(A') &= \frac{\langle A', B' \rangle}{\|B'\|^2} \cdot B' \end{aligned}$$

Da B' auf dem Einheitskreis liegt, und daher den Abstand 1 zum Nullpunkt hat, gilt $\|B'\| = 1$.

$$\begin{aligned} F_g(A') &= \frac{\langle A', B' \rangle}{\|B'\|^2} \cdot B' \\ \overset{\|B'\|=1}{\Leftrightarrow} \quad F_g(A') &= \frac{\langle A', B' \rangle}{1^2} \cdot B' \\ \Leftrightarrow \quad F_g(A') &= \langle A', B' \rangle \cdot B' \end{aligned}$$

Nach einer neuen Überlegung werden wir wieder auf dieses Zwischenergebnis zurückgreifen.
Kurz zur Erinnerung soll nochmal erwähnt werden, dass α der Winkel zwischen f und g

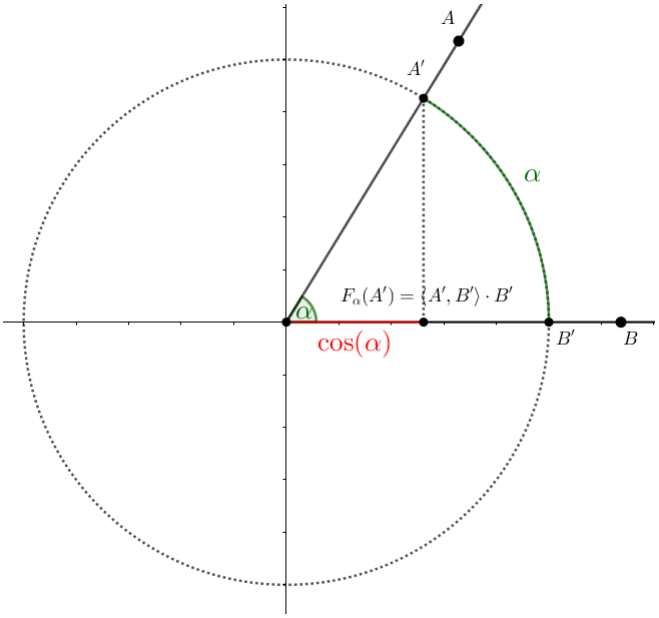


Abbildung 8: Fußpunkt und Kosinus

ist. Unser Ziel ist es nun, den Winkel α in Geschehen zu bringen. Das heißt, dass dieser nun in der Darstellung des Fußpunktes vorkommen soll. Der Nullpunkt, der Fußpunkt $F_g(A')$ und der Punkt A' bilden ein rechtwinkliges Dreieck innerhalb des Einheitskreises. Damit besteht nun die Möglichkeit, die Sinus - und Kosinusfunktion sinnvoll miteinzubeziehen. Zum Beispiel können wir A' nun so $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ beschreiben. Es gilt ja $F_g(A') = \langle A', B' \rangle \cdot B'$. Dabei ist das Skalarprodukt der Punkte A' und B', nämlich $\langle A', B' \rangle$, jene reelle Zahl die den Punkt B' so auf der Geraden g Richtung Nullpunkt verschiebt, sodass wir den Fußpunkt $F_g(A')$ erhalten. Anders ausgedrückt ist das Skalarprodukt $\langle A', B' \rangle$ der Abstand vom Fußpunkt $F_g(A')$ zum Nullpunkt. Dieser Abstand ist jedoch auch gerade $\cos(\alpha)$. Es gilt also

$$\cos(\alpha) = \langle A', B' \rangle$$

Die Abbildung 8 auf Seite 51 soll die gerade beschriebene Idee veranschaulichen. Nachdem wir nun A' und B' umschreiben und die Bilinearität des Skalarprodukts nützen,

gelangen wir zu unserem gewünschten Resultat.

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha) = \langle A', B' \rangle \\
\Leftrightarrow\ &\cos(\alpha) = \left\langle \frac{A}{\|A\|}, \frac{B}{\|B\|} \right\rangle \\
\overset{\text{Bilinearität}}{\Leftrightarrow}\ &\cos(\alpha) = \frac{1}{\|A\|} \cdot \frac{1}{\|B\|} \langle A, B \rangle \\
&\cos(\alpha) = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \qquad \text{(KS)}
\end{aligned}$$

Nun benötigen wir nur mehr einen Schritt um den Winkel α berechnen zu können. Wir müssen nur mehr den Arkuskosinus anwenden. Den können wir jedoch nur dann benützen, falls $\frac{\langle A,B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|}$ im Definitionsbereich der Arkuskosinusfunktion, nämlich $[-1, 1]$ liegt. Mithilfe der Cauchy - Schwarz'schen Ungleichung können wir das aber leicht zeigen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
&\forall A, B \in \mathbb{R}^2 : \left| \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \right| \overset{\langle A,B \rangle \leq \|A\| \cdot \|B\|}{\leq} \left| \frac{\cancel{\|A\|} \cdot \cancel{\|B\|}}{\cancel{\|A\|} \cdot \cancel{\|B\|}} \right| = |1| = 1 \\
\Rightarrow &\forall A, B \in \mathbb{R}^2 : \left| \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \right| \leq 1 \\
\Rightarrow &\forall A, B \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \leq 1 \\
\Rightarrow &\forall A, B \in \mathbb{R}^2 : \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

Somit können wir auf beiden Seiten der Gleichung "$\cos(\alpha) = \frac{\langle A,B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|}$" das Bild bezüglich der Arkuskosinusfunktion bilden:

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha) = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \\
\overset{\frac{\langle A,B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \in [-1,1]}{\Leftrightarrow}\ &\arccos(\cos(\alpha)) = \arccos\left(\left\langle \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \right\rangle \right) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha = \arccos\left(\left\langle \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

Wir können also den Winkel zweier Halbgeraden, die durch die Punkte A und B erzeugt werden, mittels der Arkuskosinusfunktion gut beschreiben.
Wir haben dieses Konzept jetzt nur im $\mathbb{R}^2$ hergeleitet, da die Skizzen im zweidimensionalen Raum, welche als Denkstützen gedacht sind, so plastischer erscheinen. Dieses Konzept lässt sich ohne weiteres in den dreidimensionalen Raum übertragen. Die dazu benötigten Funktionen, wie das Skalarprodukt als auch die Norm, wurden daher auch für den dreidimensionalen euklidischen Raum definiert. Die Herleitung dieses Konzepts im dreidimensionalen Raum verläuft komplett analog.

11. Sinus und Kreuzprodukt

In diesem Kapitel soll ein Satz bewiesen werden, welcher eine alternative Darstellung für die Fläche eines Parallelogramms zulässt. Folgend wird dieser Satz nun vorgestellt und mathematisch bewiesen. Anschließend soll der Satz geometrisch interpretiert werden.

Satz 5.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^3 : \|A \times B\| = \sin(\sphericalangle(A, B)) \cdot \|B\| \cdot \|A\|$$

Beweis. [Bär08, S. 126] Es seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte im Raum.
Wir betrachten zu Beginn nicht die Norm $\|A \times B\|$, sondern das Quadrat davon. Im ersten Schritt verwenden wir einen Zusammenhang zwischen der euklidischen Norm und dem Standardskalarprodukt.

$$\|A \times B\|^2 = \langle A \times B, A \times B \rangle$$

Nun verwenden wir das Lemma 4.

$$\langle A \times B, A \times B \rangle \overset{\text{Lemma 4}}{=} \langle A, A \rangle \cdot \langle B, B \rangle - \langle A, B \rangle \cdot \langle B, A \rangle$$

Nun verwenden wir den selben Zusammenhang aus dem ersten Schritt für die Skalarprodukte $\langle A, A \rangle$ und $skpB, B$, sowie die Symmetrie für Skalarprodukte.

$$\begin{aligned} &\underbrace{\langle A, A \rangle}_{\|A\|^2} \cdot \underbrace{\langle B, B \rangle}_{\|B\|^2} - \langle A, B \rangle \cdot \underbrace{\langle B, A \rangle}_{=\langle A,B \rangle} \\ \Leftrightarrow\ &\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 - \langle A, B \rangle^2 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt gebrauchen wir das Distributivgesetz und heben $\|A\|^2 \cdot \|B\|^2$ heraus.

$$\begin{aligned} &\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 - \langle A, B \rangle^2 \cdot \underbrace{\frac{\|A\|^2 \cdot \|B\|^2}{\|A\|^2 \cdot \|B\|^2}}_{=1} \\ \Leftrightarrow\ &\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot \left(1 - \frac{\langle A, B \rangle^2}{\|A\|^2 \cdot \|B\|^2}\right) \end{aligned}$$

Anschließend machen wir von der Gleichung (KS) von Seite 52 Gebrauch.

$$\begin{aligned} &\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|}\right)^2\right) \\ \Leftrightarrow\ &\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot (1 - (\cos(\sphericalangle(A, B))^2) \end{aligned}$$

Im Kapitel 3 "Trigonometrische Funktionen und der Einheitskreis" wurde ab Seite 9 der Zusammenhang zwischen dem pythagoräischen Satz und den Winkelfunktionen aufgezeigt. Daher gilt:

$$\begin{aligned} &\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot (1 - (\cos(\sphericalangle(A, B))^2) \\ \Leftrightarrow\ &\|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot (\sin(\sphericalangle(A, B)))^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also nun

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^3 : \|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot (\sin(\sphericalangle(A, B)))^2$$

Im nächsten Schritt wird noch die Wurzel gezogen, wobei die Betragsstrichsetzung nicht vergessen werden darf.

$$\begin{aligned}
&\forall A, B \in \mathbb{R}^3 : \|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \cdot (\sin(\sphericalangle(A, B)))^2 \\
\Leftrightarrow\ &\forall A, B \in \mathbb{R}^3 : \left|\underbrace{\|A \times B\|}_{\geq 0}\right| = \left|\underbrace{\|A\|}_{\geq 0}\right| \cdot \left|\underbrace{\|B\|}_{\geq 0}\right| \cdot |\sin(\sphericalangle(A, B))| \\
\Leftrightarrow\ &\forall A, B \in \mathbb{R}^3 : \|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot |\sin(\sphericalangle(A, B))|
\end{aligned}$$

Die Punkte A beziehungsweise B erzeugen zwei Halbgeraden. Der Winkel $\sphericalangle(A, B)$ ist die Länge des kürzeren der beiden Kreisbögen, in die der Einheitskreis durch die beiden Halbgeraden geteilt wird. Daher muss sich der Winkel $\sphericalangle(A, B)$ im Intervall $[0, \pi]$ befinden, da es sich ansonsten um den längeren Kreisbogen handeln würde. Auf diesem Intervall wird der Sinus nur auf positive Werte abgebildet. Resultierend muss $\sin(\sphericalangle(A, B))$ positiv sein. Daher können wir im Beweis die Betragsstriche bei $|\sin(\sphericalangle(A, B))|$ weglassen. Es gilt demnach

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^3 : \|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin(\sphericalangle(A, B))$$

und der Satz als bewiesen. □

Im Prinzip verpackt dieser Satz die Idee einer alternativen Darstellung des Flächeninhaltes des Parallelogramms, welches von A und B aufgespannt wird. Wie schon im Kapitel 5 auf Seite 23 erwähnt wurde, beträgt die Fläche des von A und B aufgespannten Parallelogramms nämlich genau $\|A \times B\|$. Um die geometrische Interpretation des Satzes leichter nachvollziehen zu können, wurde die Abbildung 9 auf Seite 55 zugefügt. Wie in der Skizze dargestellt, beträgt der Normalabstand des Punktes $\frac{A}{\|A\|}$ auf die Gerade, die von B erzeugt wird, genau $\sin(\alpha)$. Das kommt vom Abstand des Punktes $\frac{A}{\|A\|}$ zum Nullpunkt. Diese beträgt nämlich genau 1. Daher liegt dieser Punkt auf dem Einheitskreis und kann mithilfe der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus dargestellt werden. Der Normalabstand h_A von A auf die von B erzeugten Gerade, beträgt $\|A\| \cdot \sin(\alpha)$. Das kann man sich mithilfe der Verhältnisse

$$h_A : \|A\| = |\sin(\alpha)| : \left\| \frac{A}{\|A\|} \right\|$$

herleiten. Der Normalabstand h_A ist jedoch auch die Höhe des Parallelogramms. Die Grundlinie des Parallelogramms entspricht $\|B\|$. Daher beträgt die Fläche dieses Parallelogramms nach der uns bekannten Flächenformel $\underbrace{\sin(\alpha) \cdot \|A\|}_{=h_A} \cdot \|B\|$.

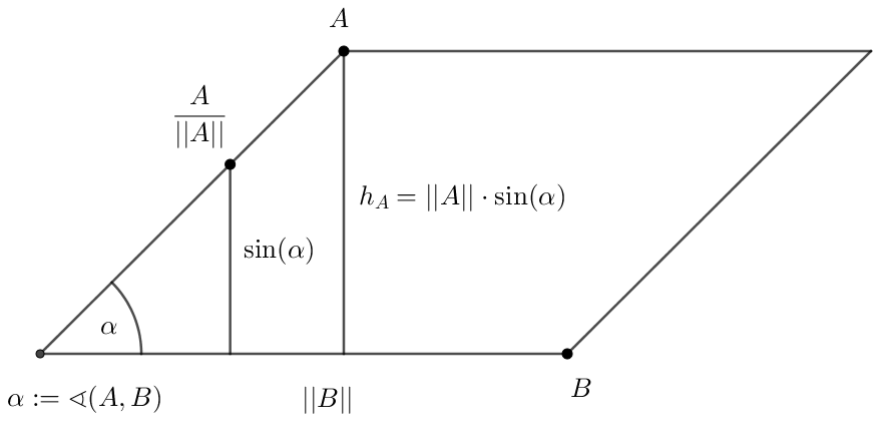


Abbildung 9: Darstellung der Fläche eines Parallelogramms

Teil II.
Sphärische Geometrie

In diesem Teil habe ich mich stark am Vorlesungsskriptum von Christian Bär [Bär08] orientiert. Sämtliche Definitionen, Sätze und Beweisideen wurden daraus entnommen.

12. Metrischer Raum

Nun können wir uns endlich der sphärischen Geometrie widmen. Dazu müssen wir uns noch von unserer Vorstellung von "Raum" loslösen und diesen Begriff ein wenig abstrahieren. Dazu führen wir das Konzept des "metrischen Raumes" ein. Damit legen wir den Grundstein für unsere Untersuchungen im sphärischen Raum.
Was ist also nun ein metrischer Raum?

Definition 7. *Es sei M eine beliebige Menge. Weiters sei $d : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche zwei Elemente von M auf eine reelle Zahl abbildet.*
Dann heißt (M, d) metrischer Raum, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(M1) $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0 \quad$ *und* $\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Dabei kann man die Menge M als Menge von Punkten und die Funktion d, als jene Funktion interpretieren, welche zwei Punkte auf ihren kürzesten Abstand zueinander abbildet. Diese Definition beschreibt in allgemeiner Weiße, was wir nun unter einen mathematischen Raum verstehen werden. Um ein Gefühl für dieses Konzept zu entwickeln,

überprüfen wir kurz, ob es sich bei der euklidischen Geometrie um einen metrischen Raum handelt.

Dabei ist die Menge E eine Ebene, die den Nullpunkt enthält. Die Funktion d ordnet jedem Punktepaar der Ebene E ihren Abstand zu. Diesen Abstand können wir auch als die Länge der Strecke zweier Punkte auffassen.

(M1) Die Gültigkeit von $(M1)$ lässt sich sehr schnell überlegen. Diese Eigenschaft beschreibt den Umstand, dass für alle möglichen Punktepaare aus der Ebene gilt, dass die Längen derer Strecken immer größer 0 sein müssen. Sollten zwei Punkte übereinanderliegen, so ist die Länge derer Strecke gleich 0.

(M2) Wenn man Anfangspunkt und Endpunkt einer Strecke vertauscht, so ändert sich nichts an der Länge der Strecke. Dieser Aussage gilt für alle Punkte der Ebene.

(M3) Wir stellen uns zwei Punkte X, Z der Ebene E vor und verbinden diese mit einer Strecke. Die Länge dieser Strecke bezeichnen wir mit $d_E(X, Z)$. Anschließend wählen wir einen dritten Punkt Y der Ebene und bilden Strecken zwischen X und Y, sowie zwischen Y und Z. Vermutlich ist jedem nun instinktiv klar, dass "$d_E(X, Z) \leq d_E(X, Z) + d_E(X, Z)$" gelten muss. Es gilt lediglich $d_E(X, Z) = d_E(X, Z) + d_E(X, Z)$ falls Y auf der Strecke zwischen X und Z liegt. Man kann diese Ungleichung auch in einem alltäglichen Kontext stellen.

Angenommen man fährt von einem Ort X zu einem anderen Ort Z. So wird der Weg immer länger, wenn man einen Umweg über Ort Y macht. Außer Y "liegt auf dem Weg" von X nach Z. Dann wird der Weg nicht länger.
Die Abbildung 10 auf Seite 57 soll den Erklärungsversuch von der Gültigkeit von $(M3)$ untermauern.

Also handelt es sich bei (E, d) um einen metrischen Raum.

Nun wollen wir eine geeignete Menge und eine "Abstandsfunktion" finden, sodass wir mithilfe des Konzepts des metrischen Raumes nun den sphärischen Raum definieren können.

13. Die Einheitssphäre

Wie schon erwähnt, bewegt man sich in der sphärischen Geometrie auf einer Kugel. Demnach benötigen wir eine Menge, deren Punkte die Oberfläche einer geeigneten Kugel beschreibt. "Geeignet" soll heißen, dass sich damit leicht rechnen lässt. Darum wählen wir die Einheitskugel oder Einheitssphäre. Diese besitzt den Nullpunkt als Mittelpunkt und einen Radius mit der Länge 1. Wir nehmen also alle Punkte des dreidimensionalen euklidischen Raumes, welche den Abstand 1 zum Nullpunkt haben. Diese Bedingung können wir hervorragen mittels der euklidischen Norm umschreiben. Die gesuchte Menge

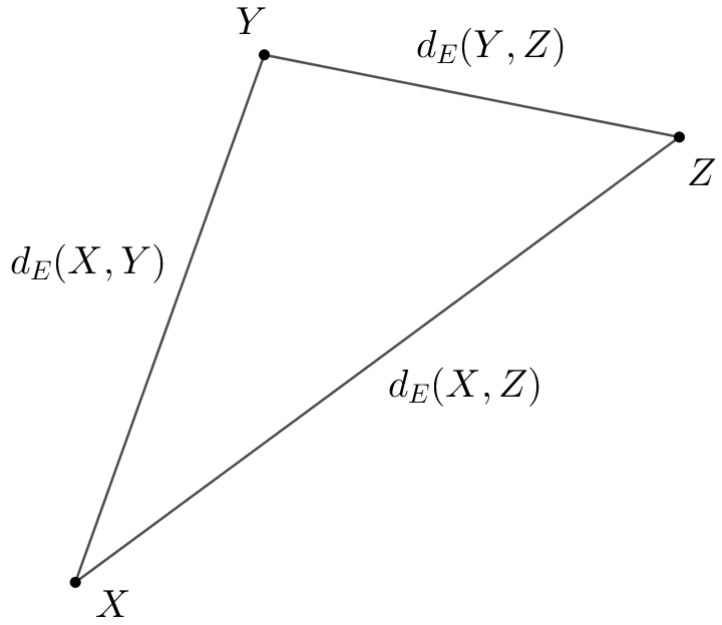


Abbildung 10: Skizze zu (M3) bezüglich der euklidischen Geometrie

lässt sich demnach wie folgt darstellen.

$$\mathbb{S}^2 := \Big\{ A \in \mathbb{R}^3 : \|A\| = 1 \Big\}$$

Abbildung 11 auf Seite 58 skizziert die Einheitskugel.

14. Sphärische Abstand

Um das Konzept des metrischen Raumes verwenden zu können, benötigen wir noch eine Funktion, die zwei Punkte der Einheitskugel auf ihren kürzesten Abstand abbildet.

Um eine geeignete Abstandsfunktion für die Sphäre bestimmen zu können, haben wir in den vorherigen Kapitel schon wichtige Vorarbeit geleistet. So lernten wir im Unterkapitel 10 "Kosinus und Skalarprodukt" einen Weg kennen, den Winkel zwischen zwei Halbgeraden, mittels der Arkuskosinusfunktion und dem Standardskalarprodukt zu beschreiben: Für $A, B \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\alpha = \arccos\left(\left\langle \frac{\langle A, B\rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} \right\rangle\right)$$

, wobei $\alpha \in [0, \pi)$ der Winkel zwischen den beiden Halbgeraden ist, die von A und B erzeugt werden.

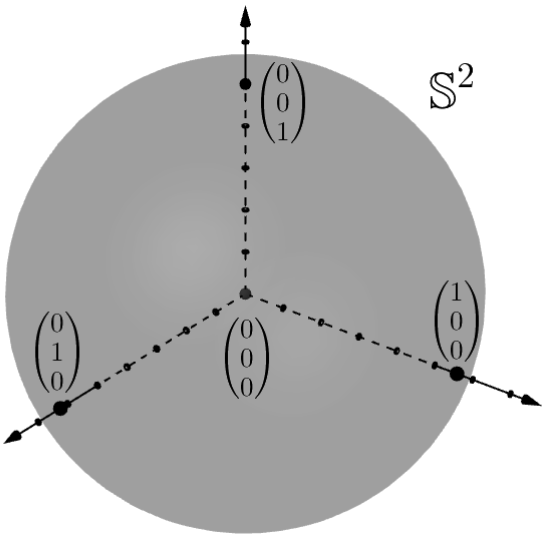


Abbildung 11: Die Einheitskugel

Tatsächlich müssen wir für die Herleitung des sphärischen Abstandes zweier Punkte nicht mehr viel tun. Die Definition des Winkels zweier Halbgeraden ist nämlich fast ident zur Definition des sphärischen Abstandes.

Definition 8. *Es seien $A, B \in \mathbb{S}^2$ zwei Punkte der Einheitskugel. Der kürzeste Abstand zwischen dieser beiden Punkte ist durch*

$$d_{\mathbb{S}^2}(A,B) := \arccos\left(\left\langle \frac{\langle A,B\rangle}{\underbrace{\|A\|}_{=1}\cdot\underbrace{\|B\|}_{=1}}\right\rangle\right) = \arccos\left(\langle A,B\rangle\right)$$

gegeben.

Doch woher kommt der Zusammenhang zwischen Winkel und Abstand?

Wir stellen uns eine Ebene E vor, welche den Nullpunkt und die beiden Punkte A und B enthält. Die Schnittmenge dieser Ebene mit der Einheitskugel ist ein Kreis $K = E \cap \mathbb{S}^2$ mit Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Nun betrachten wir diese Ebene E als eigenen zweidimensionalen euklidischen Raum. Nun können wir uns wieder den Winkel $\alpha \in [0, \pi)$ zwischen den beiden Halbgeraden berechnen, die von A bzw. von B erzeugt werden. Dafür verwenden wir das uns bekannte Resultat:

$$\alpha = \arccos\left(\left\langle \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\cdot\|B\|}\right\rangle\right)$$

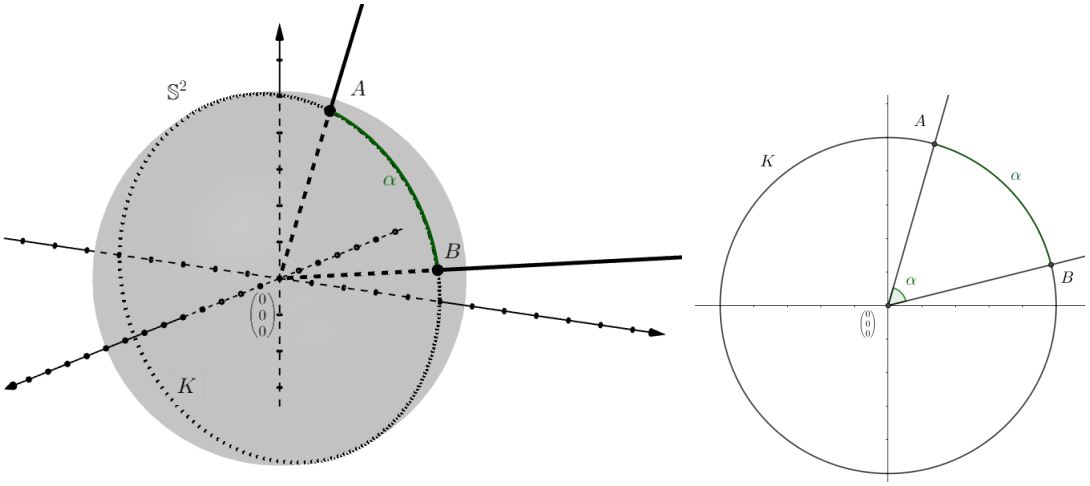


Abbildung 12: Sphärische Abstand

Die Verbindung des Winkels zum sphärischen Abstand liefert uns nun die Interpretation des Winkels im Bogenmaß
Der Winkel zwischen zwei Halbgeraden ist immer die Länge des kürzeren der beiden Kreisbögen, in die der Einheitskreis durch die zwei Halbgeraden geteilt wird.[Pau19, S. 104]
Diese Länge entspricht genau der Bogenlänge der Punkte A und B .
Zusammenfassend betrachten wir die Ebene E als eigenen euklidischen Raum. Dort interpretieren wir K als den Einheitskreis und verwenden unser bekanntes Mittel zur Winkel - beziehungsweise Bogenlängenberechnung. Nachdem wir wieder in die dreidimensionale Anschauung gewechselt haben, erkennt man, dass man den sphärischen Abstand eigentlich schon berechnet hat. Die hinzugefügte Abbildung 12 auf Seite 59 soll diese Idee visualisieren und die Argumentation untermauern.

Demnach ist

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}^2} : \ \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \arccos\left(\langle X, Y \rangle\right) \end{aligned}$$

die Funktion, welche zwei Punkten der Einheitskugel ihren kürzesten Abstand zuordnet. Somit konnten wir nun eine geeignete Menge $\mathbb{S}^2$ als auch eine passende Funktion $d_{\mathbb{S}^2}$ finden. Nun müssen wir noch formal überprüfen, ob das Paar $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$ einen metrischen Raum bildet.

15. Der Sphärische Raum

Dafür müssen wir die drei Eigenschaften $(M1), (M2)$ und $(M3)$ für unser Paar $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$ nachweisen.

15.1. M1

Es gilt jetzt die Aussage "$\forall A, B \in \mathbb{S}^2 : d_{\mathbb{S}^2}(A, B) \geq 0$ und $d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$" zu zeigen.

Beweis. Es seien $A, B \in \mathbb{S}^2$.
Im ersten Schritt werden wir die Definition des sphärischen Abstandes verwenden. Dazu muss allerdings $\langle A, B\rangle$ im Definitionsbereich der Arkuskosinusfunktion liegen. Dank der Cauchy - Schwarz'schen Ungleichung und der Tatsache, dass A und B auf der Einheitssphäre liegen, gilt praktischerweise folgendes.

$$|\langle A, B\rangle| \overset{\text{Cauchy - Schwarz}}{\leq} |\underbrace{\|A\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|B\|}_{=1}| = |1| = 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \langle A, B\rangle \leq 1$$

$$\Rightarrow \langle A, B\rangle \in [-1, 1]$$

Der sphärische Abstand der beiden Punkte A und B kann somit bestimmt werden.

$$d_{\mathbb{S}^2}(A, B) \overset{\text{Def.}d_{\mathbb{S}^2}}{=} \arccos(\langle A, B\rangle)$$

Die Arkuskosinusfunktion liefert aufgrund ihres Bildbereiches Werte im Intervall $[0, \pi)$. Deshalb kann der sphärische Abstand nie kleiner 0 werden!

$$d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = \arccos(\langle A, B\rangle) \geq 0$$

Nun müssen wir nur mehr zeigen, dass die Aussage "$A = B$" äquivalent zur Aussage "$d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = 0$" ist. Dazu muss es uns zu beweisen gelingen, dass die zweite Aussage aus der ersten Aussage folgt und dass umgekehrt die erste Aussage aus der zweiten Aussage folgt.
Wir nehmen nun an, dass $A = B$ gilt und wollen die Aussage $d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = 0$ daraus folgern.
Zu Beginn ersetzen wir den Punkt B mit dem Punkt A.

$$d_{\mathbb{S}^2}(A, B) \overset{A=B}{=} d_{\mathbb{S}^2}(A, A)$$

Daraufhin bilden wir das Bild von (A, A) bezüglich $d_{\mathbb{S}^2}$.

$$d_{\mathbb{S}^2}(A, A) = \arccos(\langle A, A\rangle)$$

Im dritten Beweisschritt werden wir wieder einen günstigen Zusammenhang zwischen euklidischer Norm und Skalarprodukt verwenden.

$$\arccos(\langle A, A\rangle) \overset{\langle A,A\rangle = \|A\|^2}{=} \arccos(\|A\|^2)$$

Da der Punkt A auf der Einheitskugel liegt, beträgt sein Abstand zum Nullpunkt genau 1. Daher gilt $\|A\| = 1$.

$$\arccos(\|A\|^2) = \arccos(1^2) = \arccos(1)$$

An dieser Stelle erinnern wir uns an die Definition der Arkuskosinusfunktion aus dem Unterkapitel 3 "Trigonometrische Funktionen".

$$\arccos(1) = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(1)$$

Gesucht ist also das Urbild der auf $[0,\pi]$ eingeschränkten Kosinusfunktion von 1. In anderen Worten müssen wir uns überlegen, welche reelle Zahl aus $[0,\pi]$ bezüglich des Kosinus auf die 1 abgebildet wird. Mithilfe des Einheitskreises lässt man sich leichter überzeugen, dass 0 unsere gesuchte reelle Zahl sein muss.

$$\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(1) = 0$$

Unter der Voraussetzung $A = B$ gilt also folglich $\arccos(\langle A, B\rangle) = 0$.

Nun müssen wir noch die andere Richtung beweisen. Dazu nehmen wir an, dass $\arccos(\langle A, B\rangle) = 0$ gilt und wollen daraus $A = B$ folgern.

$$\begin{aligned} & \arccos(\langle A, B\rangle) = 0 \\ \overset{\text{Def.Arkuskosinus}}{\Leftrightarrow} & \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(\langle A, B\rangle) = 0 \end{aligned}$$

Gesucht wird nun jene reelle Zahl, welche bezüglich der auf $[0,\pi]$ eingeschränkten Kosinusfunktion das Bild 0 annimmt. Diese gesuchte Zahl ist 1, da $\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(\underbrace{\langle A, B\rangle}_{=1}) &= 0 \\ \Rightarrow \langle A, B\rangle &= 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung (KS), welche im Unterkapitel 10 "Kosinus und Skalarprodukt" auf Seite 52 bewiesen wurde, wird uns auch im nächsten Schritt von Nutzen sein. Dabei beschreibt $\alpha \in [0,\pi)$ den Winkel zwischen den beiden Halbgeraden die von A beziehungsweise B erzeugt werden.

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle A, B\rangle}_{=\cos(\alpha)\cdot\|A\|\cdot\|B\|} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(\alpha) \cdot \underbrace{\|A\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|B\|}_{=1} &= 1 \\ \cos(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

Das Bild des Kosinus an der Stelle α wird nicht nur 1, falls α gleich 0 ist. Wir müssen die Periodizität der Kosinusfunktion miteinbeziehen. Zur Erinnerung gilt nämlich $1 = \cos(0) = \cos(2\cdot\pi) = \cos(4\cdot\pi) = \ldots$.
Die Zahl α beschreibt gerade den Winkel zwischen zwei Halbgeraden. Für die beiden Halbgeraden, welche von A beziehungsweise von B erzeugt werden, macht es jedoch

keinen Unterschied, ob α nun 0, 2π , 3π und so weiter, ist. Die Halbgeraden liegen in jedem Fall genau übereinander, was bedeutet, dass A und B auf nur einer Halbgeraden liegen. Da A und B zusätzlich den selben Abstand zum Nullpunkt besitzen, folgt daraus, dass A gleich B sein muss.
Es gilt also, dass aus "$d_{\mathbb{S}^2}(A,B) = 0$" die Aussage "$A = B$" folgt. □

Daher gilt nun

$$\forall A, B \in \mathbb{S}^2 : A = B \Leftrightarrow d_{\mathbb{S}^2}(A,B) = 0 \tag{M1}$$

15.2. M2

Wir zeigen "$\forall A, B \in \mathbb{S}^2 : d_{\mathbb{S}^2}(A,B) = d_{\mathbb{S}^2}(B,A)$".

Beweis. Es seien $A, B \in \mathbb{S}^2$.
Mithilfe der Symmetrie des Skalarproduktes können wir diesen Beweis schnell abschließen.

$$d_{\mathbb{S}^2}(A,B) = \arccos(\langle A,B\rangle) \overset{\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle}{=} \arccos(\langle B,A\rangle) = d_{\mathbb{S}^2}(B,A)$$

Es gilt also $(M2)$ für den sphärischen Abstand. □

15.3. M3

Nun versuchen wir die Dreiecksungleichung für den sphärischen Abstand zu zeigen.
Dabei werden wir das "Lemma 4", nämlich

$$\forall A, B, C, D \in \mathbb{R}^3 : \langle A,C\rangle \cdot \langle B,D\rangle - \langle B,C\rangle \cdot \langle A,D\rangle = \langle (A \times B), (C \times D)\rangle$$

aus dem Unterunterkapitel 7.4 auf Seite 43 benötigen. Weiters werden wir von einem Zusammenhang zwischen Vektorprodukt und der Sinusfunktion Gebrauch machen. Diesen werden wir noch vor dem eigentlichen Beweis von $(M3)$ herleiten. Genauer werden wir den Sinus des sphärischen Abstands bestimmen.

Dazu seien $A, B \in \mathbb{S}^2$.
Wir betrachten die Norm des Vektorproduktes von A und B. Zu Beginn verwenden wir die Eigenschaft, dass die Norm eines Punktes gleich der Wurzel des Skalarproduktes des Punktes mit sich selber ist. Diese Eigenschaft wurde im Unterunterkapitel 8.4 "Euklidische Norm" auf Seite 43 besprochen.

$$\|(A \times B)\| = \sqrt{\langle A \times B, A \times B\rangle}$$

Anschließend verwenden wir das vierte Lemma.

$$\sqrt{\langle A \times B, A \times B\rangle} \overset{\text{Lemma 4}}{=} \sqrt{\langle A,A\rangle \cdot \langle B,B\rangle - \langle A,B\rangle \cdot \langle B,A\rangle}$$

Im nächsten Schritt verwenden wir die Gleichung $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle$. Dabei ist die Norm von A gleich 1, da der Punkt auf der Einheitskugel liegt. Zusätzlich werden wir aus der Symmetrie des Skalarproduktes Nutzen ziehen.

$$\sqrt{\underbrace{\langle A, A\rangle}_{=\|A\|^2=1^2} \cdot \underbrace{\langle B, B\rangle}_{=\|B\|^2=1^2} - \langle A, B\rangle \cdot \underbrace{\langle B, A\rangle}_{=\langle A,B\rangle}} = \sqrt{1 - (\langle A, B\rangle)^2}$$

Nun benötigen wir den sphärischen Abstand der Punkte A und B. Jedoch formen wir die Gleichung um, indem wir von beiden Seiten das Bild der Kosinusfunktion bilden. So bekommen wir Folgendes:

$$\begin{aligned} & d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = \arccos(\langle A, B\rangle) \\ \overset{\cos}{\Leftrightarrow} & \cos(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)) = \cos(\arccos(\langle A, B\rangle)) \\ \Leftrightarrow & \cos(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)) = \langle A, B\rangle \end{aligned}$$

In unserem nächsten Beweisschritt können wir nun die hergeleitete Gleichheit "$\cos(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)) = \langle A, B\rangle$" zielführend einsetzen.

$$\sqrt{1 - (\langle A, B\rangle)^2} = \sqrt{1 - (\cos(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)))^2}$$

Ferner wird sich für uns nun der Satz des Pythagoras als äußerst nützlich erweisen. Im Kapitel 3 "Trigonometrische Funktionen" wurde geklärt, dass der pythagoräische Satz auch für die trigonometrischen Funktion Sinus und Kosinus bedeutsam ist. Die im pythagoräischen Satz vorkommende Gleichung wird nun nützlich umgeformt.

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in \mathbb{R} : \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \\ \overset{-\cos(\alpha)^2}{\Leftrightarrow} & \forall \alpha \in \mathbb{R} : \sin(\alpha)^2 = 1 - \cos(\alpha)^2 \end{aligned}$$

Es gilt nun folgendes.

$$\sqrt{1 - (\cos(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)))^2} = \sqrt{\sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B))^2}$$

Beim Nachweis der Gültigkeit von $(N2)$ bezüglich der euklidischen Norm wurde schon erwähnt, dass für alle reellen Zahlen c die Gleichung $\sqrt{c^2} = |c|$ gilt. Da die Bilder der Sinusfunktion auch reelle Zahlen sind, könnte man c mit einem Bild des Sinus ersetzen.

$$\sqrt{\sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B))^2} = |\sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B))|$$

Aufgrund des Bildbereiches der Arkosinusfunktion $[0, \pi]$ ist der sphärische Abstand auch immer in diesem Intervall. Das Bild des Sinus nimmt für den sphärischen Abstand daher nur Werte zwischen 0 und 1 an. Somit ist $\sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B))$ positiv und die Betragsstriche können weggelassen werden.

$$|\sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B))| = \sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B))$$

Es gilt also nun:

$$\|A \times B\| = \sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)) \tag{SA}$$

Somit können wir nun $(M3)$ beziehungsweise die Dreiecksungleichung für sphärische Abstände, nämlich "$\forall A, B, C \in \mathbb{S}^2 : d_{\mathbb{S}^2}(A, C) \leq d_{\mathbb{S}^2}(A, B) + d_{\mathbb{S}^2}(B, C)$" zeigen.

Beweis. wir unterteilen den Beweis in zwei Fälle!

Fall 1: Wir nehmen an, dass $d_{\mathbb{S}^2}(A, B) + d_{\mathbb{S}^2}(B, C) \geq \pi$ ist.
Sphärische Abstände nehmen, aufgrund ihrer Definition, nur Werte im Intervall $[0, \pi]$ an. Daher können wir die folgende Ungleichungskette bilden.

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}^2}(A, C) &\overset{d_{\mathbb{S}^2}(A,C)\in[0,\pi]}{\leq} \pi \overset{\text{Annahme}}{\leq} d_{\mathbb{S}^2}(A, B) + d_{\mathbb{S}^2}(B, C) \\ &\Rightarrow d_{\mathbb{S}^2}(A, C) \leq d_{\mathbb{S}^2}(A, B) + d_{\mathbb{S}^2}(B, C) \end{aligned}$$

Für den ersten Fall gilt die Dreiecksungleichung somit trivialerweise.

Fall 2: Nun nehmen wir das Gegenteil der Annahme des ersten Falles an. Sei also $d_{\mathbb{S}^2}(A, B) + d_{\mathbb{S}^2}(B, C) < \pi$. Nun betrachten wir das Bild der Kosinusfunktion bezüglich $(d_{\mathbb{S}^2}(A, B) + d_{\mathbb{S}^2}(B, C))$ und verwenden das Additionstheorem aus dem Kapitel 3 "Trigonometrische Funktionen"

$$\begin{aligned} &\cos(d_{\mathbb{S}^2}(A, B) + d_{\mathbb{S}^2}(B, C)) \\ \overset{\text{Additionstheorem}}{=} &\cos(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)) \cdot \cos(d_{\mathbb{S}^2}(B, C)) - \sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B)) \cdot \sin(d_{\mathbb{S}^2}(B, C)) \end{aligned}$$

Wir benützen nun die Definition des sphärischen Abstands und umschreiben den Sinus des sphärischen Abstands (SA).

$$\begin{aligned} &\cos(\underbrace{d_{\mathbb{S}^2}(A, B)}_{=\arccos(\langle A,B\rangle)}) \cdot \cos(\underbrace{d_{\mathbb{S}^2}(B, C)}_{=\arccos(\langle B,C\rangle)}) - \underbrace{\sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, B))}_{=\|A\times B\|} \cdot \underbrace{\sin(d_{\mathbb{S}^2}(B, C))}_{=\|B\times C\|} \\ =&\langle A, B\rangle \cdot \langle B, C\rangle - \|A \times B\| \cdot \|B \times C\| \end{aligned}$$

Folglich können wir jetzt die Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung verwenden und so das Produkt der beiden Normen durch ein Skalarprodukt abschätzen.

$$\langle A, B\rangle \cdot \langle B, C\rangle - \|A \times B\| \cdot \|B \times C\| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \langle A, B\rangle \cdot \langle B, C\rangle - \langle A \times B, B \times C\rangle$$

Das "Lemma 4" erlaubt uns folgende Umformung.

$$\begin{aligned} &\langle A, B\rangle \cdot \langle B, C\rangle - \underbrace{\langle A \times B, B \times C\rangle}_{=\langle A,B\rangle\cdot\langle B,C\rangle+\langle B,B\rangle\cdot\langle A,C\rangle} \\ \overset{\text{Lemma 4}}{=} &\langle A, B\rangle \cdot \langle B, C\rangle - \langle A, B\rangle \cdot \langle B, C\rangle + \langle B, B\rangle \cdot \langle A, C\rangle \end{aligned}$$

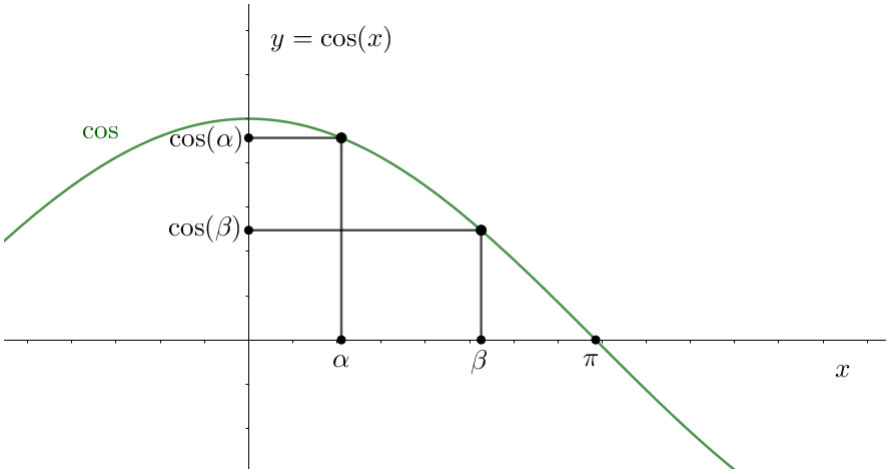


Abbildung 13: Graph der Kosinusfunktion

Nun können wir, mithilfe einfacher Rechentechnik, die zuletzt erhaltene Summe vereinfachen. Ferner können wir das Skalarprodukt von B mit sich selbst umschreiben.

$$\cancel{\langle A,B\rangle \cdot \langle B,C\rangle} - \cancel{\langle A,B\rangle \cdot \langle B,C\rangle} + \underbrace{\langle B,B\rangle}_{=\|B\|^2=1} \cdot \langle A,C\rangle = \langle A,C\rangle$$

Im zweiten Beweisschritt ersetzten wir $\cos(d_{\mathbb{S}^2}(A,B))$ mit $\langle A,B\rangle$. Nun werden wir im letzten Beweisschritt das Gleiche in umgekehrter Weise vollführen.

$$\langle A,C\rangle = \cos(d_{\mathbb{S}^2}(A,B))$$

Wir konnten im Großen und Ganzen nun Gültigkeit der Ungleichung

$$\cos(d_{\mathbb{S}^2}(A,B) + d_{\mathbb{S}^2}(B,C)) \leq \cos(d_{\mathbb{S}^2}(A,B))$$

nachweisen.
Nun werden wir uns eine nützliche Eigenschaft des Kosinus zu Nutzen machen. Die Kosinusfunktion ist auf dem Intervall $[0,\pi]$ nämlich streng monoton fallend. Das bedeutet, dass größer werdende Argumente in $[0,\pi]$ immer kleinere Werte liefern. Es gilt also allgemein für alle α und β in $[0,\pi]$ mit $\alpha < \beta$, dass $\cos(\alpha) > \cos(\beta)$. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man einfach den Graph der Kosinusfunktion und legt den Fokus auf Argumente im Intervall $[0,\pi]$. Die Abbildung 13 auf Seite 65 stellt den Graphen der Kosinusfunktion dar.
Sodass diese Monotonie für unseren Beweis sinnvoll eingesetzt werden kann, müssen die Argumente "$d_{\mathbb{S}^2}(A,B)$" und "$d_{\mathbb{S}^2}(A,B)+d_{\mathbb{S}^2}(B,C)$" auch im Intervall $[0,\pi]$ liegen.
Unser erstes Argument, der sphärische Abstand $d_{\mathbb{S}^2}(A,B)$, liegt aufgrund des Bildbereichs der Arkuskosinusfunktion im gewünschten Intervall. Das zweite Argument,

nämlich $d_{\mathbb{S}^2}(A,B) + d_{\mathbb{S}^2}(B,C)$ ist aufgrund der Annahme, die wir zu Beginn getroffen haben, echt kleiner als π und aufgrund von $(M1)$ größer gleich 0. Somit liegt auch dieses Argument in unserem gewünschten Intervall $[0,\pi]$.
Aufgrund der erhaltenen Ungleichung und der strengen Monotonie der Kosinusfunktion auf $[0,\pi]$ gilt nun:

$$d_{\mathbb{S}^2}(A,B) \leq d_{\mathbb{S}^2}(A,B) + d_{\mathbb{S}^2}(B,C)$$

Und damit konnten wir die Dreiecksungleichung und somit die dritte Eigenschaft $(M3)$ von metrischen Räumen für $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$ nachweisen.

□

Es handelt sich bei dem Paar $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$ also um einen metrischen Raum. Diesen metrischen Raum werden wir von nun an "sphärischen Raum" nennen.

Da wir nun klären konnten, was wir unter dem sphärischen Raum verstehen, wird es nun Zeit einige geometrische Objekte davon zu definieren.

16. Großkreise

Ein elementares Konzept der sphärischen Geometrie sind Großkreise. Diese nehmen im sphärischen Raum die Rolle der Geraden ein und werden benötigt um Kreisbögen zu definieren. Diese sind wiederum das sphärische Pendant zu Strecken der ebenen Geometrie. Daher kommen wir nicht drumherum, Großkreise einzuführen.

Definition 9. *Man stelle sich eine Ebene E vor, welche den Mittelpunkt 0 der Einheitskugel $\mathbb{S}^2$ enthält. Die Schnittmenge der Ebene und der Kugel, also $K := \mathbb{S}^2 \cap E$ nennt man Großkreis.*

Wichtig dabei ist, dass die mit dem Einheitskreis geschnittene Ebene unbedingt den Nullpunkt enthalten muss. Denn dann würde es sich bei der Schnittmenge nicht mehr um einen Großkreis, sondern um einen Kleinkreis handeln. Die beiden Kreistypen werden in der Abbildung 14 auf der Seite 67 dargestellt.
Weiters besitzen Großkreise zwei äußerst interessante Eigenschaften, die ich folgend gerne anführen möchte.

- Durch zwei verschiedene Punkte, die nicht gemeinsam mit dem Mittelpunkt der Sphäre auf einer Geraden liegen, geht genau ein Großkreis. Diese Überlegung ist leicht zu beweisen:
  Die beiden Punkte liegen nicht mit dem Mittelpunkt auf einer Geraden. Somit bestimmen diese drei Punkte eindeutig eine Ebene. Diese Ebene erzeugt genau einen Großkreis.
  Man beachte diese Gemeinsamkeit mit den Geraden der ebenen Geometrie. Durch zwei Punkte verläuft genau eine Gerade. Aufgrund dieser Analogie bezeichnet man Großkreise auch gerne als Kugelgeraden.

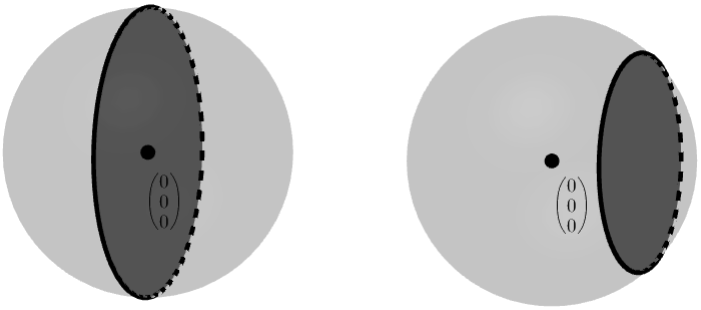


Abbildung 14: Groß - und Kleinkreis

- Zwei verschiedene Großkreise schneiden sich immer in genau zwei Punkten. Auch diese Behauptung lässt sich einfach begründen:
  Die zwei Ebenen, welche die beiden Großkreise erzeugen, schneiden sich in einer Geraden, die durch den Kugelmittelpunkt geht. Die Schnittpunkte der Geraden mit der Kugel sind genau zwei Punkte.

Nun stellt sich jedoch die Frage, wie man einen Großkreis konkret beschreiben kann. Dazu betrachten wir die Ebene E, die den Großkreis $K = \mathbb{S}^2 \cap E$ eindeutig bestimmt als einen eigenen zweidimensionalen Raum. Von dieser Perspektive aus betrachtet, ist der Großkreis ein Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und einem Radius von 1. Er kann demnach als Einheitskreis interpretiert werden. Es seien $P_1, P_2 \in K$ Punkte auf dem Großkreis mit der Eigenschaft, dass die von P_1 beziehungsweise P_2 erzeugten Geraden, normal aufeinander stehen. Diese Eigenschaft beschreiben wir mittels dem Skalarprodukt. So gilt $\langle P_1, P_2 \rangle = 0$. Den Großkreis können wir nun wie folgt darstellen.

$$K = \{\cos(t) \cdot P_1 + \sin(t) \cdot P_2 : t \in \mathbb{R}\}$$

Die ausgewählte Abbildung 15 auf Seite 68 soll die Darstellung des Großkreises näher veranschaulichen.
An dieser Stelle möchte ich nun auf die Darstellung des Einheitskreises $\mathbb{S}^1$ hinweisen. Den Einheitskreis haben wir im Kapitel 3 "Trigonometrische Funktionen" mittels den Punkten $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und mithilfe der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus beschrieben.

$$\mathbb{S}^1 = \left\{\cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sin(\alpha) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} : \alpha \in [0, 2\pi)\right\}$$

Inwiefern unterscheiden sich die beiden Mengen K und $\mathbb{S}^1$? Einerseits sind die Mengen, in denen die Winkel liegen, unterschiedlich. Aufgrund der Periodizität der Winkelfunktionen hat dieser Unterschied jedoch keine Auswirkungen, die Elemente bleiben die selben. Andererseits wird K von den Punkten P_1 und P_2, der Einheitskreis jedoch von $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und

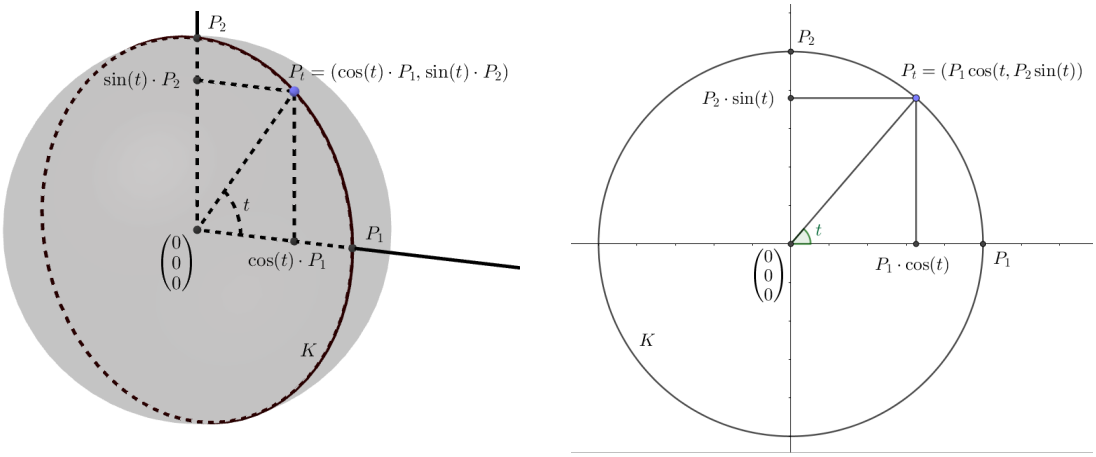


Abbildung 15: Beschreibung von Großkreisen

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Diese Punktepaare übernehmen jedoch die selbe Rolle.
Im Prinzip geben die Punkte P_1 und P_2 die Richtung des Großkreises an. Es gibt nämlich viele Möglichkeiten, wie ein Großkreis liegen kann.

Nun werden wir in der nächsten Definition nicht mehr alle Winkel aus $\mathbb{R}$ für die Menge K zulassen. Dadurch entsteht nicht mehr der ganze Großkreis, sondern nur ein Teil davon.

Definition 10. *Ein Großkreisbogen ist eine Teilmenge eines Großkreises K. Auch diesmal sind $P_1, P_2 \in K$ zwei, zu einander normal stehende, Punkte auf dem Großkreis, also mit der Eigenschaft, dass ihr Skalarprodukt 0 ist. Die reelle Zahl L liegt zwischen 0 und 2π. Dann nennt man die Menge*

$$\{\cos(t) \cdot P_1 + \sin(t) \cdot P_2 : t \in [0, L]\}$$

Großkreisbogen, wobei es sich bei L um die Länge des Großkreisbogens handelt.

Diese Definition lässt gut plausibilisieren, indem man einige Punkte der Menge berechnet. Nachdem man sich diese skizziert hat, lässt sich die Form eines Großkreisbogens erkennen.
Eine weitere interessante Eigenschaft von Großkreise, die wir benötigen, soll im folgenden Satz beschrieben werden.

Satz 6. *Es seien $A, B \in \mathbb{S}^2$ mit $A \neq B$. Falls $A \neq (-B)$, so existieren genau zwei Großkreisbögen mit den Endpunkten A und B. Die beiden Großkreisbögen haben eine unterschiedliche Länge und werden einfach durch die Namensgebung, "der kurze Großkreisbogen" und "der lange Großkreisbogen" unterschieden.*

In Abbildung 16 auf Seite 69 wird die Existenz dieser unterschiedlichen Großkreisbögen näher veranschaulicht. Dabei wird der lange Großkreisbogen punktiert dargestellt,

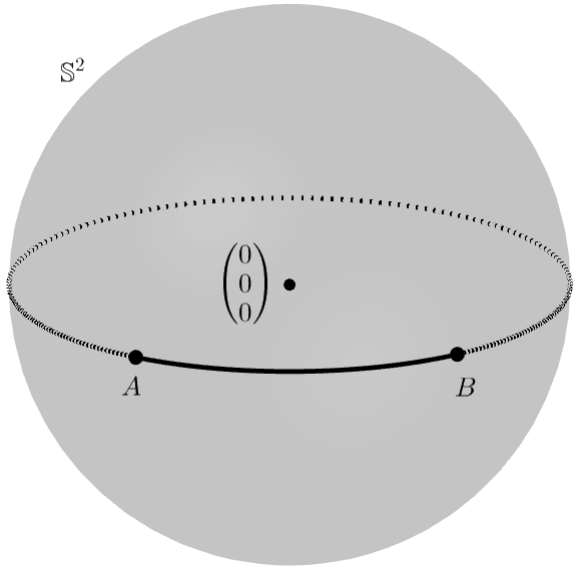


Abbildung 16: kurzer - und langer Großkreisbogen

wohingegen der kurze Großkreisbogen durchgezogen wurde.

Den kürzeren Großkreisbogen mit den Endpunkten A und B bezeichnen wir auch als $\widehat{AB}$. Dessen Länge entspricht dem sphärischen Abstand $d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$ der Punkte A und B. Der lange Großkreisbogen ist einfach das Komplement von der Länge von $\widehat{AB}$ zu π. Demnach ist die Differenz von π und der Länge des kurzen Großkreisbogen die Länge des langen Großkreisbogen.

17. Das sphärische Dreieck

Der primäre Aufgabenbereich der sphärischen Geometrie umfasst, neben sphärischen Flächenberechnungen, das Berechnen sphärischer Dreiecke. Dazu müssen wir jedoch erstmal ein sphärisches Dreieck definieren. Wie auch in der ebenen Geometrie, benötigt man für ein Dreieck drei Eckpunkte. Diese werden durch Seiten miteinander verbunden. Wir haben schon gelernt, dass Großkreisbögen in der sphärischen Geometrie die Rolle von Strecken übernehmen. Weiters müssen wir noch den Winkelbegriff in die sphärische Geometrie adaptieren. In der ebenen Geometrie entspricht der Winkel einer reellen Zahl, welche die Lage zweier Strecken, die im selben Punkt beginnen, beschreiben. Es ist auch möglich die Lage zweier, im selben Punkt beginnenden, Großkreisbögen durch eine reelle Zahl zu beschreiben.

Die beiden Kreisbögen

$$K_1 = \{\cos(t) \cdot P_1 + \sin(t) \cdot P_2 : t \in \mathbb{R}\}$$

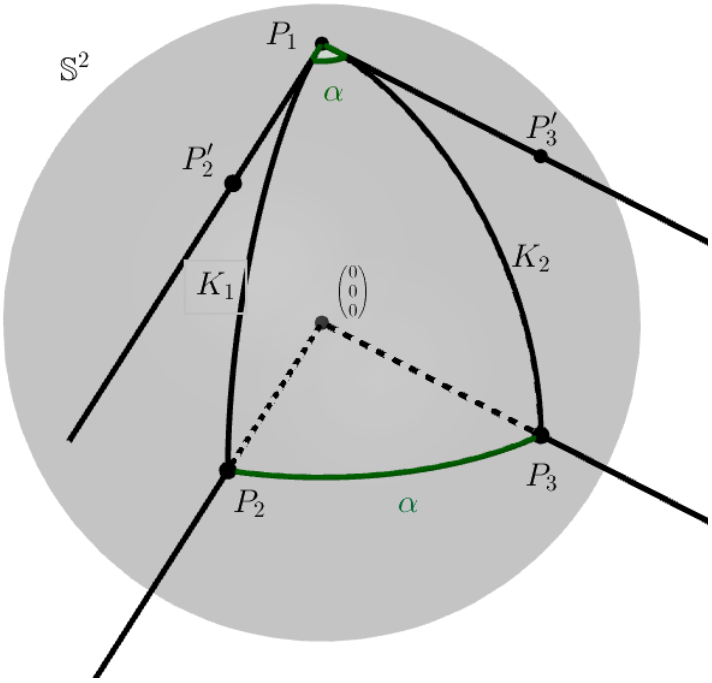


Abbildung 17: Der sphärische Winkel

und

$$K_2 = \{\cos(t) \cdot P_1 + \sin(t) \cdot P_3 : t \in \mathbb{R}\}$$

beginnen beide im Punkt P_1. Gesucht ist also eine reelle Zahl $\alpha = \sphericalangle(K_1, P_1, K_2)$, die die Lage dieser beiden Kreisbögen beschreibt. Dazu berechnen wir uns zwei weitere Punkte $P_2' = P_1 + P_2$ und $P_3' = P_1 + P_3$. Den gesuchten Winkel definieren wir nun einfach als den Winkel der beiden Halbgeraden, welche beide bei P_1 starten und durch P_2' beziehungsweise durch P_3' hindurch verlaufen. Es gilt nun diesen Winkel zu berechnen. Wir betrachten dazu den Winkel der beiden Halbgeraden die im Nullpunkt beginnen und durch P_2 beziehungsweise durch P_3 hindurchgehen. Dieser stimmt mit dem gesuchten Winkel überein, kann jedoch leicht mithilfe des sphärischen Abstandes berechnet werden. Für den gesuchten Winkel α gilt also nun:

$$\alpha = \sphericalangle(K_1, P_1, K_2) =: \sphericalangle(P_2', P_1, P_3') = \sphericalangle(P_2, 0, P_3) = d_{\mathbb{S}^2}(P_2, P_3) = \arccos(\langle P_2, P_3 \rangle)$$

Abbildung 17 auf Seite 70 soll die Idee zur Definition des sphärischen Winkels veranschaulichen.
Folgend soll die Idee nun auch in Form einer Definition zusammengefasst werden.

Definition 11. *Die Punkte $P_1, P_2 \in \mathbb{S}^2$ erzeugen den Großkreisbogen $K_1 = \{\cos(t) \cdot P_1 + \sin(t) \cdot P_2 : t \in [0, L_1]\}$ und die Punkte P_1, P_3 bestimmen den Großkreisbogen*

$K_2 = \{\cos(t) \cdot P_1 + \sin(t) \cdot P_3 : t \in [0, L_2]\}$. *Dann ist der Winkel von* K_1 *und* K_2 *in* P_1 *durch die eindeutige Zahl*

$$\sphericalangle(K_1, P_1, K_2) = \arccos(\langle P_2, P_3 \rangle) \in [0, \pi]$$

definiert.

Wir kennen Punkte im sphärischen Raum, wissen über die Analogie zwischen Strecken und Großkreisbögen Bescheid und verstehen das Konzept des Winkels im sphärischen Raum. Daher können wir nun das sphärische Dreieck definieren.

Definition 12. *Ein euklidisches sphärisches Dreieck oder euklidisches Kugeldreieck ist das Tripel* (A, B, C) *von Punkten* $A, B, C \in \mathbb{S}^2$*, die nicht alle auf einen Großkreis liegen. Genauer sind die drei Punkte paarweise verschieden und paarweise antipodal. Das heißt, dass* $A \neq -B$,$B \neq -C$ *und* $A \neq -C$ *gilt.* A, B *und* C *heißen Ecken des Dreiecks. Die kurzen Großkreisbögen, welche die Punkte miteinander verbinden, sind die Seiten des Dreiecks. Diese kann man sich mithilfe des sphärischen Abstandes berechnen, also* $a := \widehat{CB} = d_{\mathbb{S}^2}(C, B)$*,* $b := \widehat{BC} = d_{\mathbb{S}^2}(B, C)$ *und* $c := \widehat{AB} = d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$*. Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind dann durch* $\alpha = \sphericalangle(b, A, c)$*,* $\beta = \sphericalangle(a, B, c)$ *und* $\gamma = \sphericalangle(a, C, b)$ *gegeben.*

Abbildung 18 auf Seite 72 zeigt ein sphärisches Dreieck.

Rein rechnerisch würde es keine Probleme machen, wenn ein Winkel gleich 0 oder gleich π wäre. In der Definition 11 sehen wir, dass dies der Bildbereich des Arkuskosinus zulassen würde. Allerdings würde es sich bei so einem Winkel nicht mehr um ein sphärisches Dreieck handeln. Daher nehmen wir an, dass Winkel eines sphärischen Dreiecks ungleich 0 und ungleich π sind. Weiters könnte man für die Seiten des sphärischen Dreiecks auch die langen Großkreisbögen zulassen. Dann würde es sich jedoch nicht mehr um ein **euklidisches** Kugeldreieck handeln. Wenn wir daher folgend von einem sphärischen Dreieck oder von einem Kugeldreieck sprechen, so ist immer ein euklidisches Kugeldreieck gemeint.
Demnach nehmen wir für ein Kugeldreieck (A, B, C) an, dass

$$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$$

gilt.

18. Winkelsumme im sphärischen Dreieck

In diesem Kapitel wollen wir eine allgemeine Aussage über die Winkelsumme von Kugeldreiecken treffen. Wie wir wissen, beträgt die Winkelsumme eines Dreiecks in der Ebene immer π beziehungsweise 180°. Diese Behauptung lässt sich durch der Skizze in Abbildung 19 auf Seite 72 plausibilisieren.
Für drei Winkel α, β, γ eines Dreiecks in der Ebene gilt also demnach:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

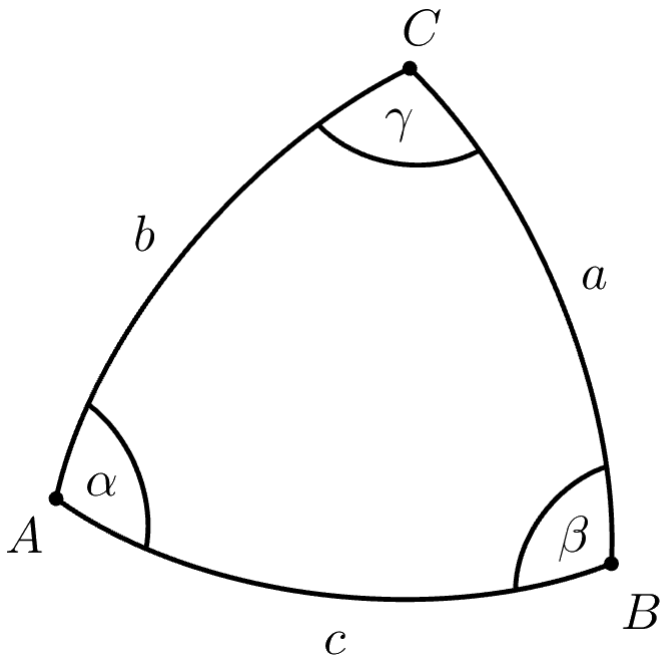


Abbildung 18: sphärisches Dreieck

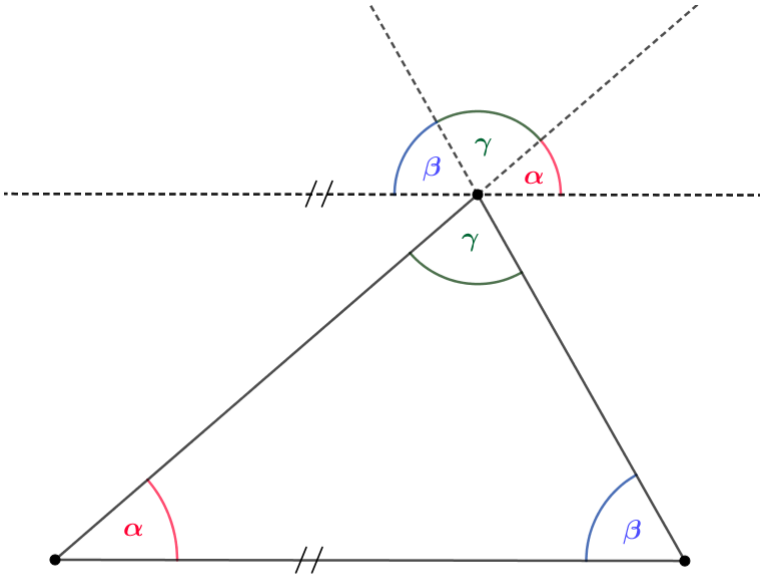


Abbildung 19: Winkelsumme des ebenen Dreiecks

Nun stellt sich die Frage, ob dies auch auf die Winkelsumme von Kugeldreiecken zutrifft. Um das überprüfen zu können, benötigen wir noch einen Hilfssatz über die Darstellung von Winkel eines Kugeldreiecks.

18.1. Winkellemma

Lemma 1. *Sei (A, B, C) ein Kugeldreieck mit Winkelgrößen α, β, γ. So gilt:*

$$\alpha = \sphericalangle(A \times B, A \times C),$$
$$\beta = \sphericalangle(B \times A, B \times C),$$
$$\gamma = \sphericalangle(C \times A, C \times B),$$

Beweis. Es genügt nur eine der drei Gleichungen zu zeigen. Die anderen beiden kann man komplett analog beweisen. Wir werden uns deshalb nur auf die erste Gleichung konzentrieren.
Es sei also (A, B, C) ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln α, β, γ. Es seien P_1 beziehungsweise P_2 jene Punkte, welche die Großkreisbögen $\widehat{AB} = \{\cos(t) \cdot A + \sin(t) \cdot P_1 : t \in [0, L_1]\}$ beziehungsweise $\widehat{AC} = \{\cos(t) \cdot A + \sin(t) \cdot P_2 : t \in [0, L_2]\}$ erzeugen. Laut der Definition des Großkreisbogens gilt für den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\widehat{AB}, A, \widehat{AC})$ nun $\alpha = \arccos(\langle P_1, P_2\rangle)$. Wenden wir darauf den Kosinus an, erhalten wir folgende Zeile.

$$\cos(\alpha) = \cos(\arccos(\langle P_1, P_2\rangle)) = \langle P_1, P_2\rangle$$

. Weiters können wir den Punkt B als Element des Kreisbogens $\widehat{AB}$ und den Punkt C als Element des Kreisbogens $\widehat{AC}$ beschreiben. Es gilt also $B \in \{\cos(t) \cdot A + \sin(t) \cdot P_1 : t \in [0, L_1]\}$. Demnach muss es eine reelle Zahl $b \in [0, L_1]$ geben, sodass

$$B = \cos(b) \cdot A + \sin(b) \cdot P_1$$

gilt!
Analog muss auch die reelle Zahl $c \in [0, L_2]$ existieren, sodass

$$C = \cos(c) \cdot A + \sin(c) \cdot P_2$$

. Nun betrachten wir das Vektorprodukt $A \times B$. Dabei verwenden wir die letzte Darstellung von B. Anschließend nützen wir die Bilinearität des Vektorproduktes.

$$A \times B = A \times (\cos(b) \cdot A + \sin(b) \cdot P_1) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \cos(b) \cdot (A \times A) + \sin(b) \cdot (A \times P_1)$$

Das Vektorprodukt eines Punktes mit sich selbst ergibt den Nullvektor. Es gilt also demnach:

$$\cos(b) \cdot (\underbrace{A \times A}_{=0}) + \sin(b) \cdot (A \times P_1) = \sin(b) \cdot (A \times P_1)$$

Zusammenfassend konnten wir also nun zeigen, dass

$$A \times B = \sin(b) \cdot (A \times P_1)$$

. Komplett analog können wir noch zusätzlich die Gleichung

$$A \times C = \sin(c) \cdot (A \times P_2)$$

herleiten, indem wir den Punkt B durch C ersetzen.
Nun werden wir diese beiden Resultate dazu verwenden, die Gleichung

$$\sphericalangle(A \times B, A \times C) = \alpha$$

zu zeigen.
Zu Beginn werden wir von der Definition von sphärischen Winkeln Gebrauch machen.

$$\sphericalangle(A \times B, A \times C) \overset{\text{Def.}}{=} \arccos\left(\frac{\langle A \times B, A \times C\rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|}\right)$$

Nun kommen die beiden Resultate "$A \times B = \sin(b) \cdot (A \times P_1)$" und "$A \times C = \sin(c) \cdot (A \times P_2)$" zum Einsatz.

$$\arccos\left(\frac{\langle A \times B, A \times C\rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|}\right) \overset{\text{Resultate}}{=} \arccos\left(\frac{\langle \sin(b) \cdot (A \times P_1), \sin(c) \cdot (A \times P_2)\rangle}{\|\sin(b) \cdot (A \times P_1)\| \cdot \|\sin(c) \cdot (A \times P_2)\|}\right)$$

Nun können wir, aufgrund der Bilinearität des Skalarproduktes, die reellen Zahlen $\sin(b)$, sowie $\sin(c)$ herausheben. Weiters können dieselben reellen Zahlen im Betrag aus der Norm "gezogen" werden. Diese Eigenschaften haben wir in den Kapiteln 6"Skalarprodukt" beziehungsweise 8 "Normen" besprochen.

$$\begin{aligned} &\arccos\left(\frac{\langle \sin(b) \cdot (A \times P_1), \sin(c) \cdot (A \times P_2)\rangle}{\|\sin(b) \cdot (A \times P_1)\| \cdot \|\sin(c) \cdot (A \times P_2)\|}\right) \\ \overset{\text{Bilinearität, } (N2)}{=} &\arccos\left(\frac{\sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \langle A \times P_1, A \times P_2\rangle}{|\sin(b)| \cdot |\sin(c)| \cdot \|A \times P_1\| \cdot \|A \times P_2\|}\right) \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $\widehat{AB}$ beziehungsweise $\widehat{AC}$ liegen die reellen Zahlen c beziehungsweise b in den Intervallen $[0, L_1]$ beziehungsweise $[0, L_2]$. Daher gilt $0 \leq c \leq L_1 \leq \pi$, sowie $0 \leq b \leq L_2 \leq \pi$. Die reellen Zahlen b und c liegen daher im Intervall $[0, \pi]$. Die Sinusfunktion nimmt für Elemente aus diesem Intervall nur positive Werte an. Daher gilt $\sin(c), \sin(b) \geq 0$. Somit ist es legitim, die Betragsstriche wegzulassen.

$$\begin{aligned} &\arccos\left(\frac{\sin(c) \cdot \sin(b) \cdot \langle A \times P_1, A \times P_2\rangle}{|\sin(c)| \cdot |\sin(b)| \cdot \|A \times P_1\| \cdot \|A \times P_2\|}\right) \\ \overset{\sin(c),\sin(b)\geq 0}{=} &\arccos\left(\frac{\cancel{\sin(c) \cdot \sin(b)} \cdot \langle A \times P_1, A \times P_2\rangle}{\cancel{\sin(c) \cdot \sin(b)} \cdot \|A \times P_1\| \cdot \|A \times P_2\|}\right) \end{aligned}$$

Nun benötigen wir eine Zwischenüberlegung, weshalb wir unser Augenmerkmal auf die beiden Normen $\|A \times P_1\|$ und $\|A \times P_2\|$ legen.

Die Punkte A und P_1 liegen auf der Einheitskugel. Es gilt demnach $\|A\| = \|P_1\| = 1$. Sie haben also beide den Abstand 1 zum Nullpunkt. Weiters stehen die beiden Punkte orthogonal aufeinander. Das bedeutet, dass die von A erzeugte Gerade normal auf der von P_1 erzeugten Geraden steht. Diese Orthogonalität folgt aus der Tatsache, dass A und P_1 den Großkreisbogen $\widehat{AB}$ erzeugen. Wie wir im Kapitel 5 "Vektorprodukt" gelernt haben, ist ein Vektorprodukt zweier Punkte immer ein weiterer Punkt, dessen Abstand zum Nullpunkt dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms entspricht. Dazu betrachte man Abbildung 5 auf Seite 24. Da A und P_1 nun orthogonal aufeinander stehen und den Abstand 1 zum Nullpunkt besitzen, ist deren aufgespanntes Parallelogramm ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 1. Somit besitzt der Punkt $A \times P_1$ den Abstand 1 zum Nullpunkt. Es gilt also $\|A \times P_1\| = 1$. Selbige Überlegung können wir auf das Vektorprodukt $A \times P_2$ übertragen. Es gilt also auch $\|A \times P_2\| = 1$.
Diese Überlegungen übertragen wir nun auf unseren Beweis.

$$\arccos\left(\frac{\langle A \times P_1, A \times P_2\rangle}{\underbrace{\|A \times P_1\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|A \times P_2\|}_{=1}}\right) = \arccos(\langle A \times P_1, A \times P_2\rangle)$$

Im nächsten Schritt können wir das Lemma 4 verwenden.

$$\arccos(\langle A \times P_1, A \times P_2\rangle) \overset{\text{Lemma 4}}{=} \arccos(\langle A, A\rangle \cdot \langle P_1, P_2\rangle - \langle P_1, A\rangle \cdot \langle A, P_2\rangle)$$

Nun stellen wir Überlegungen zu den einzelnen Skalarprodukten an.
Zuerst betrachten wir das Skalarprodukt $\langle A, A\rangle$. Im Kapitel 10 "Kosinus und Skalarprodukt" wurde die Gültigkeit der Gleichung (KS)auf Seite 52 gezeigt. Es gilt daher für $\langle A, A\rangle$:

$$\langle A, A\rangle = \cos(\sphericalangle(A, 0, A)) \cdot \|A\| \cdot \|A\|$$

bewiesen, wodurch dieser spezifische Fall auch gültig ist. Der Winkel $\sphericalangle(A, 0, A)$ muss gleich 0 sein und $\|A\|$ gleich 1. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\langle A, A\rangle = \cos(\sphericalangle(A, 0, A)) \cdot \|A\| \cdot \|A\| \\ \Leftrightarrow &\langle A, A\rangle = \underbrace{\cos(0)}_{=1} \cdot 1 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow &\langle A, A\rangle = 1 \end{aligned}$$

Nun richten wir unseren Fokus auf des Skalarprodukt $\langle P_1, A\rangle$. Da A und P_1 den Großkreis $\widehat{AB}$ erzeugen, sind die zwei Punkte orthogonal. Im Kapitel 6 "Skalarprodukt" konnten wir klären, dass das Skalarprodukt zweier orthogonalen Punkte immer 0 ist. Daher gilt $\langle P_1, A\rangle = 0$ und aufgrund der Symmetrie des Skalarproduktes auch $\langle A, P_1\rangle = \langle P_1, A\rangle = 0$. Übertragen wir diese Überlegungen auf unseren Beweis, ergeben sich folgende Resultate.

$$\arccos(\underbrace{\langle A, A\rangle}_{=1} \cdot \langle P_1, P_2\rangle - \underbrace{\langle P_1, A\rangle}_{=0} \cdot \underbrace{\langle A, P_2\rangle}_{=0}) = \arccos(\langle P_1, P_2\rangle) = \alpha$$

Wir konnten also nun zeigen, dass

$$\sphericalangle(A \times B, A \times C) = \alpha$$

gilt. Somit gilt dieses Lemma als bewiesen und wir können es im nächsten Unterunterkapitel einsetzen. □

18.2. Winkelsumme

Es sei (A, B, C) ein Kugeldreieck und

$$\begin{aligned}\alpha &= \sphericalangle(A \times B, A \times C),\\ \beta &= \sphericalangle(B \times A, B \times C),\\ \gamma &= \sphericalangle(C \times A, C \times B)\end{aligned}$$

seine drei Winkel.
Um eine vernünftige Aussage über die Winkelsumme $\alpha+\beta+\gamma$ treffen zu können, müssen wir uns vorher versichern, dass keiner der drei Winkel α, β, γ gleich 0 ist. Das könnte beispielsweise für $\alpha = \sphericalangle(A \times B, A \times C)$ geschehen, falls die beiden Punkte $A \times B$ und $A \times C$ gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Geraden liegen.
Im Kapitel 4 "Matrizen und Determinanten" lernten wir eine Methode kennen, mit welcher wir überprüfen können, ob sich drei Punkte mit dem Nullpunkt auf einer Ebene befinden. Wenn es uns gelingt zu zeigen, dass $\det(A \times B, C \times B, C \times A) \neq 0$, so liegt keiner der drei Punkte $A \times B$, $C \times B$ und $C \times A$ gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Ebene und somit können die Punkte auch nicht paarweise auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegen.
Im ersten Rechenschritt verwenden wir das Lemma 2.

$$\det(A \times B, C \times B, C \times A) \overset{\text{Lemma 2}}{=} \langle (A \times B) \times (C \times B), C \times A\rangle$$

Anschließend machen wir vom Lemma 3 Gebrauch.

$$\langle (A \times B) \times (C \times B), C \times A\rangle \overset{\text{Lemma 3}}{=} \langle \langle A, C \times B\rangle \cdot B - \langle B, C \times B\rangle \cdot A, C \times A\rangle$$

Das Skalarprodukt $\langle B, C \times B\rangle$ muss gleich 0 sein, da die Punkte B und $C \times B$ aufgrund der Definition des Vektorprodukts orthogonal aufeinander stehen.

$$\left\langle \langle A, C \times B\rangle \cdot B - \underbrace{\langle B, C \times B\rangle}_{=0} \cdot A, C \times A \right\rangle = \langle \langle A, C \times B\rangle \cdot B, C \times A\rangle$$

Die Bilinearität des Skalarproduktes erlaubt es uns, reelle Zahlen aus der ersten oder zweiten Komponente zu ziehen. Bei einem Skalarprodukt handelt es sich immer um eine reelle Zahl, so wie bei $\langle A, C \times B\rangle$.

$$\langle \underbrace{\langle A, C \times B\rangle}_{\in \mathbb{R}} \cdot B, C \times A\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle A, C \times B\rangle \cdot \langle B, C \times A\rangle$$

Nun können wir auf $\langle A, C \times B\rangle$, als auch auf $\langle B, C \times A\rangle$ das Lemma 2 anwenden.

$$\langle A, C \times B\rangle \cdot \langle B, C \times A\rangle \overset{\text{Lemma 2}}{=} \det(A, C, B) \cdot \det(B, C, A)$$

Da wir angenommen haben, dass (A, B, C) ein sphärisches Dreieck ist, liegen die drei Punkte A, B und C nicht gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Ebene. Sonst würde es sich bei (A, B, C) nicht um ein sphärisches Dreieck handeln, sondern um einen Großkreisbogen! Und genau deswegen gilt nun

$$\det(A, C, B), \det(B, C, A) \neq 0$$

Da nun keiner der Faktoren des Produktes $\det(A, C, B) \cdot \det(B, C, A)$ gleich 0 ist, kann das Produkt auch nicht gleich 0 sein.

$$\underbrace{\det(A, C, B)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det(B, C, A)}_{\neq 0} \neq 0$$

Es gilt also zusammenfassend:

$$\det(A \times B, C \times B, C \times A) \neq 0$$

Somit liegt keiner der Punkte $A \times B$, $C \times B$ und $C \times A$ gemeinsam mit einem anderen der drei Punkte und dem Nullpunkt auf einer Geraden. Die Winkel α, β und γ sind somit ungleich 0.

Bevor wir den letzten Teil in diesem Unterkapitel bestreiten können, müssen wir uns noch eine Gleichung herleiten. Abbildung 20 auf Seite 78 soll die folgende Überlegung visualisieren.
Der Punkt $\frac{A\times C}{\|A\times C\|}$ liegt auf der Einheitssphäre. Die Gerade, welche von diesem Punkt erzeugt wird, schneidet die Einheitssphäre im Punkt $\frac{A\times C}{\|A\times C\|}$ und im Punkt $\frac{-(A\times C)}{\|A\times C\|}$. Der sphärische Abstand $d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times C}{\|A\times C\|}, \frac{-(A\times C)}{\|A\times C\|}\right)$ dieser beiden Punkte entspricht genau der Länge eines halben Großkreises, nämlich π. Tatsächlich gibt es zwischen diesen beiden Punkten nicht exakt einen Großkreisbogen mit der Länge $d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times C}{\|A\times C\|}, \frac{-(A\times C)}{\|A\times C\|}\right)$. Es gibt sogar unendlich viele Großkreisbögen mit der Länge $d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times C}{\|A\times C\|}, \frac{-(A\times C)}{\|A\times C\|}\right)$. Von dieser Menge an Großkreisbögen lässt sich genau einer finden, welcher den Punkt $\frac{A\times B}{\|A\times B\|}$ enthält. Damit können wir diesen Großkreisbogen mit der Länge π in zwei Großkreisbögen unterteilen. Es gilt also nun

$$d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{-(A \times C)}{\|A \times C\|}\right) = d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right) + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{-(A \times C)}{\|A \times C\|}\right)$$

Wir interpretieren den sphärischen Abstand nun als Winkel. Dabei gilt $d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times C}{\|A\times C\|}, \frac{A\times B}{\|A\times B\|}\right) = \sphericalangle(A \times C, A \times B)$. Der Winkel beschreibt ja nur die Lage der Halbgeraden. Die Punkte die angegeben werden sind jene, die die Halbgeraden erzeugen. Man könnte diese Punkte ohne weiteres durch andere Punkte, die auf derselben Halbgeraden liegen, ersetzen.

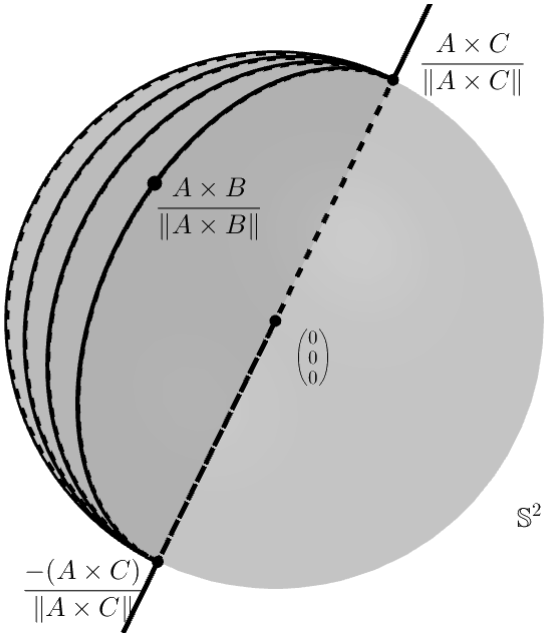


Abbildung 20: Denkstütze zum Beweis der Winkelsumme

Daher können wir statt $\sphericalangle\left(\frac{A\times C}{\|A\times C\|}, \frac{A\times B}{\|A\times B\|}\right)$ auch $\sphericalangle(A \times C, A \times B)$ schreiben. Dadurch ändert sich die Lage der Halbgeraden nämlich nicht und der Winkel bleibt unverändert.

$$\underbrace{d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{-(A \times C)}{\|A \times C\|}\right)}_{=\pi} = \underbrace{d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right)}_{=\sphericalangle(A\times C, A\times B)} + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{-(A \times C)}{\|A \times C\|}\right)$$

Wir gaben dem Winkel $\sphericalangle(A \times B, A \times C)$ bereits den Namen α. Es gilt also nun die Gleichung

$$\pi = \alpha + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{-(A \times C)}{\|A \times C\|}\right)$$

. Wir konnten im Kapitel 5 "Vektorprodukt" feststellen, dass das Vektorprodukt nicht kommutativ ist. Jedoch gilt das Lemma 1: "$\forall A, B \in \mathbb{R}^3 : A \times B = -(B \times A)$".

$$\begin{aligned}
&\pi = \alpha + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{-(A \times C)}{\|A \times C\|}\right)\\
\overset{\text{Lemma 4}}{\Leftrightarrow}\ &\pi = \alpha + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{C \times A}{\|-(C \times A)\|}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\pi = \alpha + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{C \times A}{\|C \times A\|}\right)
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt kommt uns die Dreiecksungleichung des sphärischen Abstandes zu Gute. Der Punkt $\frac{C\times B}{\|C\times B\|}$ liegt nämlich nicht auf dem Großkreisbogen der eindeutig durch

den sphärischen Abstand $d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times B}{\|A\times B\|}, \frac{C\times A}{\|C\times A\|}\right)$ bestimmt ist. Dieser Großkreisbogen besitzt den Anfangspunkt $\frac{A\times B}{\|A\times B\|}$ und den Endpunkt $\frac{C\times A}{\|C\times A\|}$. Die sphärische Distanz zwischen diesen beiden Punkten ist im sphärischen Raum der kürzeste Weg zwischen diesen beiden Punkten. Wenn wir einen Umweg über den Punkt $\frac{C\times B}{\|C\times B\|}$ nehmen würden, so würde der Gesamtweg auf alle Fälle länger werden. Dieser Sachverhalt wurde im Kapitel 15 "Der Sphärische Raum" genauer beleuchtet und im Unterkapitel 15.3 auf Seite 62 bewiesen.

$$\begin{aligned}\pi =& \alpha + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times B}{\|A\times B\|}, \frac{C\times A}{\|C\times A\|}\right)\\ \Leftrightarrow \pi \overset{(M3)}{<}& \alpha + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times B}{\|A\times B\|}, \frac{C\times B}{\|C\times B\|}\right) + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{C\times B}{\|C\times B\|}, \frac{C\times A}{\|C\times A\|}\right)\end{aligned}$$

Wieder können wir die sphärischen Abstände als Winkel interpretieren. Daher gilt nun folgendes.

$$\begin{aligned}&\pi < \alpha + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{A\times B}{\|A\times B\|}, \frac{C\times B}{\|C\times B\|}\right) + d_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{C\times B}{\|C\times B\|}, \frac{C\times A}{\|C\times A\|}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\pi < \alpha + \sphericalangle(A\times B, C\times B) + \sphericalangle(C\times B, C\times A)\end{aligned}$$

Sodass der letzte Schritt ersichtlicher erscheint, schreiben wir die Winkel noch etwas um. Einerseits ist es offensichtlich, dass $\sphericalangle(C\times B, C\times A) = \sphericalangle(C\times A, C\times B)$ gelten muss, andererseits benötigt es nochmal ein wenig Überlegung die Gleichheit $\sphericalangle(A\times B, C\times B) = \sphericalangle(B\times A, B\times C)$ zu verstehen. Dazu dient Abbildung 21 auf Seite 80 als Denkstütze. Nichtsdestotrotz gelten nun folgende Äquivalenzen.

$$\begin{aligned}&\pi < \alpha + \sphericalangle(A\times B, C\times B) + \sphericalangle(C\times B, C\times A)\\ \Leftrightarrow\ &\pi < \alpha + \underbrace{\sphericalangle(B\times A, B\times C)}_{=\beta} + \underbrace{\sphericalangle(C\times A, C\times B)}_{=\gamma}\\ \Leftrightarrow\ &\pi < \alpha + \beta + \gamma\end{aligned}$$

Die Winkelsumme von einem sphärischen Dreieck ist also, im Gegensatz zum ebenen Pendant, echt größer als π. Somit konnten wir nun wenigstens eine untere Schranke für die Winkelsumme finden. Im nächsten Unterkapitel werden wir nun auch eine obere Schranke finden.

18.3. Beschränktheit der Winkelsumme

Die Winkelsumme eines Kugeldreiecks kann nie größer $3\cdot\pi$ werden, da jeder der drei Winkel kleiner π sein muss. Das kommt von der Definition eines sphärischen Dreiecks. Man stelle sich nun einen Großkreis vor, auf welchem drei Punkte A, B, C liegen. Dieses Punktetripel bildet noch kein Dreieck, da die Winkel α, β, γ jeweils gleich π wären. Wenn man aber nun einen der drei Punkte leicht vom Großkreis entfernt, so entsteht ein sphärisches Dreieck, da alle drei Winkel ein wenig kleiner werden. Dabei schrumpft auch die Winkelsumme, wie man bei Abbildung 22 auf Seite 81 sehen kann. Daher können wir den folgenden Satz formulieren.

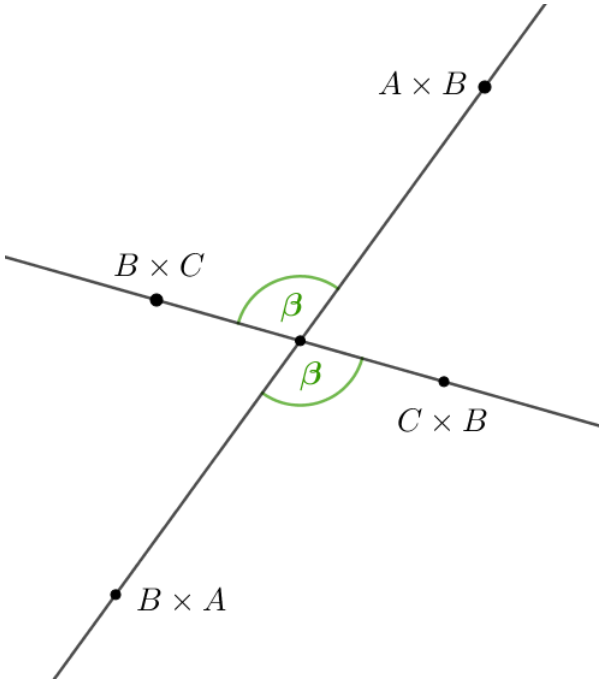


Abbildung 21: Gegenüberliegender Winkel

Satz 7. *Für die Winkelgrößen α, β, γ eines sphärischen Dreiecks gilt*

$$\alpha + \beta + \gamma \in (\pi, 3\pi)$$

19. Das Polardreieck

Zu jedem Kugeldreieck existiert ein anderes eindeutig bestimmtes Dreieck, welches Polardreieck genannt wird. Dieses Dreieck wird uns dabei helfen, den Winkelkosinussatz zu beweisen. Die Frage ist jedoch nun, wie wir zu einem gegebenen sphärischen Dreieck das dazugehörige Polardreieck bestimmen können. Dazu müssen wir die Eckpunkte des Polardreiecks berechnen. Diese werden Pole genannt, und im nächsten Unterkapitel behandelt.

19.1. Großkreis und Pol

Ein Pol ist ein Punkt auf der Einheitskugel. Um diesen bestimmen zu können benötigen wir einen Großkreis. Salopp gesagt ist es nun unser Ziel, einem Großkreis einen Punkt zuzuordnen, wie man dem Äquator auf natürlicher Weise den Nordpol zuordnen kann. Gesucht ist also nun jener Punkt, welcher zu jedem Punkt des gegebenen Großkreises den selben sphärischen Abstand besitzt. Dafür würden nun zwei Punkte in Frage kommen. Auf unser Beispiel mit der Erdkugel umgemünzt, würde der Nord - und auch der

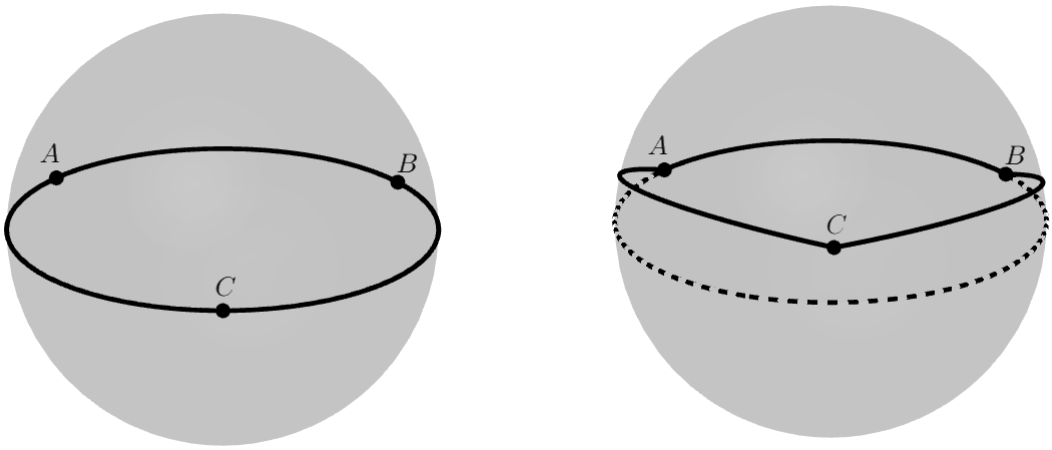


Abbildung 22: Beschränktheit der sphärischen Winkelsumme

Südpol für den Äquator als Großkreis in Frage kommen. Daher stelle man sich vor, man würde in einem Zug den Äquator entlang fahren. Zum einen gibt es dann die Seite in Fahrtrichtung links und zum anderen die Seite in Fahrtrichtung rechts. Der gesuchte Pol eines Großkreises ist nun jener Pol, welcher sich in Fahrtrichtung links befindet. Diesen Pol kann man daher auch Linkspol nennen. Wir stellen uns nun vor, dass wir den Äquator von Westen nach Osten entlang fahren. Der Linkspol wäre dann der Nordpol. Abbildung 23 auf Seite 82 soll diese Überlegung veranschaulichen. Einem Großkreis eine "Fahrtrichtung" zu verpassen bedeutet im mathematischen Sinne, den Großkreis mit einer Orientierung zu versehen. [Sch17, S. 19 - 21]

Zusammenfassend können wir also nun jedem orientierten Großkreis einen Linkspol zuordnen. Weiters lassen sich Links - und Rechtspol eines orientierten Großkreises leicht berechnen. Dazu benötigt man jene Gerade, welche normal auf die durch den Großkreis eindeutig bestimmte Ebene steht und durch den Nullpunkt hindurchgeht. Die Schnittpunkte dieser Gerade mit der Einheitssphäre sind dann gerade die Pole.

Angenommen $A, B \in \mathbb{S}^2$ liegen gemeinsam auf einem Großkreis. Die Punkte $A \times B$ und $-(A \times B)$ befinden sich aufgrund der Definition des Vektorproduktes auf einer Geraden, die durch den Nullpunkt geht. Indem wir die beiden Punkte durch ihren Abstand zum Nullpunkt teilen, erhalten wir zwei neue Punkte die auf der selben Geraden liegen, jedoch nun normiert sind. Das bedeutet, dass sie nun den Abstand 1 zum Nullpunkt besitzen und somit auf der Einheitskugel liegen. Die Punkte $\frac{A \times B}{\|A \times B\|}$ und $\frac{-(A \times B)}{\|A \times B\|}$ sind die Schnittpunkte der Gerade mit der Einheitskugel und somit die Pole jenes Großkreises, welcher A und B enthält. Die Orientierung des Großkreises bestimmt, welcher Pol der Linkspol und welcher der Rechtspol ist. Die drei Seiten eines Kugeldreiecks bestimmen eindeutig drei Großkreisbögen, welche wiederum drei eindeutig bestimmte Linkspole besitzen. Diese drei Linkspole bilden dann die drei Eckpunkte des Polardreiecks.

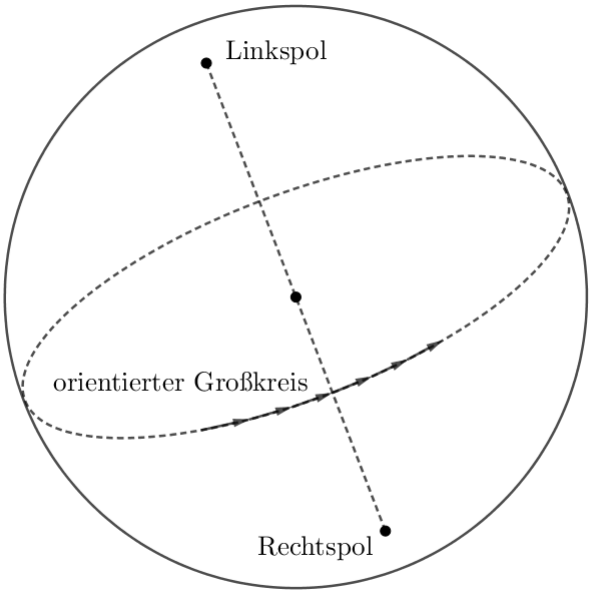


Abbildung 23: Großkreis mit Pole

19.2. Definition des Polardreiecks

Es sei (A, B, C) ein sphärisches Dreieck. Die drei gesuchten Linkspole können wir richtig berechnen, indem wir das Vorzeichen der Determinante $\det(A, B, C)$ betrachten! Sollte diese Determinante positiv sein, so sind die Punkte

$$\frac{A \times B}{\|A \times B\|} \qquad \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \qquad \frac{A \times C}{\|A \times C\|}$$

die drei Linkspole, welche das gesuchte Polardreieck zum sphärischen Dreieck (A, B, C) bilden.
Falls die Determinante $\det(A, B, C)$ negativ ist, so bilden die drei Punkte

$$\frac{-(A \times B)}{\|A \times B\|} \qquad \frac{-(B \times C)}{\|B \times C\|} \qquad \frac{-(A \times C)}{\|A \times C\|}$$

das gesuchte Polardreieck.
Nun wollen wir diese beiden Fälle zusammenfassen und das Polardreieck allgemein definieren. Dazu benötigen wir die Vorzeichenfunktion oder Signumfunktion.

Definition 13. *Die Funktion*

$$\text{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 1, \textit{falls } x > 0 \\ 0, \textit{falls } x = 0 \\ -1, \textit{falls } x < 0 \end{cases}$$

nennt man Vorzeichenfunktion oder Signumfunktion. Sie bildet jede reelle Zahl auf ihr Vorzeichen ab.

Damit können wir nun das Polardreieck allgemein definieren. Dazu setzen wir $\epsilon := \text{sign}(\det(A, B, C))$, wobei das Punktetripel (A, B, C) ein Kugeldreieck bildet.

Definition 14. *Es sei (A, B, C) ein Kugeldreieck. Das sphärische Dreieck (A', B', C'), wobei*

$$A' := \epsilon \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \qquad B' := \epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|} \qquad C' := \epsilon \cdot \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$$

nennt man Polardreieck zu (A, B, C).

19.3. Eigenschaften eines Polardreiecks

Nun stellt sich für uns die Frage, wie die Seiten und Winkel von (A, B, C) mit denen von (A', B', C') zusammenhängen. Dazu betrachten wir die Seite a' des Dreiecks (A', B', C'). Es gilt ja bekanntlich:

$$a' = d_{\mathbb{S}^2}(B', C') \overset{\text{Definition}}{=} d_{\mathbb{S}^2}\left(\epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \epsilon \cdot \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right)$$

Der sphärische Abstand kann, wie schon beschrieben, als Winkel interpretiert werden. Dabei können wir die "Normierung" der Punkte einfach weglassen.

$$d_{\mathbb{S}^2}\left(\epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \epsilon \cdot \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right) = \sphericalangle(\epsilon \cdot (C \times A), \epsilon \cdot (A \times B))$$

Glücklicherweise können wir das Vorzeichen ϵ auch einfach weg lassen. Das kommt von der Gleichung "$\sphericalangle(C \times A, A \times B) = \sphericalangle(-(C \times A), -(A \times B))$". Von dieser Gleichheit lässt man sich nach Betrachtung der Abbildung 21 auf Seite 80 überzeugen.

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\epsilon \cdot (C \times A), \epsilon \cdot (A \times B)) &= \sphericalangle(C \times A, A \times B) \\ &\overset{\substack{\text{antikommutatives} \\ =}}{} \overset{\text{Vektorprodukt}}{} \sphericalangle(-(A \times C), A \times B) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt schreiben wir $\sphericalangle(-(A \times C), A \times B)$ einfach als $\pi - \sphericalangle(A \times C, A \times B)$. Die Abbildung 24 auf Seite 84 soll die Gültigkeit dieses Rechenschrittes bestätigen. Demnach gilt also:

$$\sphericalangle(-(A \times C), A \times B) = \pi - \sphericalangle(A \times C, A \times B)$$

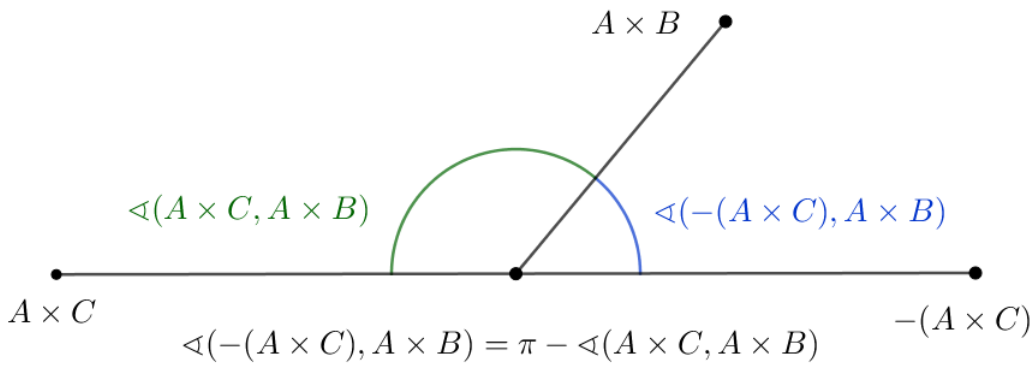


Abbildung 24: Überlegung zu Gegenwinkel

Im Unterkapitel 18.1 "Winkellemma" konnten wir zeigen, dass $\alpha = \sphericalangle(A \times C, A \times B)$ gilt. Demnach schreiben wir:

$$\pi - \sphericalangle(A \times C, A \times B) = \pi - \alpha$$

Zusammenfassend gilt also nun folgender Zusammenhang.

$$a' = \pi - \alpha$$

Die Seite $a' = \widehat{B'C'}$ des Polardreiecks (A', B', C') entspricht genau $\pi - \alpha$, wobei α eine Winkelgröße des Dreiecks (A, B, C) ist. Somit konnten wir einen sehr brauchbaren Zusammenhang zwischen diesen beiden Dreiecken herstellen. Analog kann man sich auch die beiden Gleichungen

$$b' = \pi - \beta \qquad\qquad c' = \pi - \gamma$$

herleiten.

Um später den Winkelkosinussatz schnell und unkompliziert beweisen zu können, benötigen wir noch einen weiteren Hilfssatz. Folgend soll dieses Lemma nun formuliert und bewiesen werden.

Lemma 2. *Sei (A, B, C) ein sphärisches Dreieck und (A', B', C') das Polardreieck zu (A, B, C). Dann ist (A, B, C) das Polardreieck zu (A', B', C').*

Beweis. Es sei (A'', B'', C'') das Polardreieck zu (A', B', C'). Nun müssen wir die Gleichheit "$(A'', B'', C'') = (A, B, C)$" nachweisen. Dazu müssen wir zeigen, dass die jeweiligen Eckpunkte die selben sind. Da der Beweisvorgang für alle Punkte analog abläuft, genügt es nur die Gleichheit von einem Eckpunktpaar zu zeigen. Wir werden im Zuge dieses

Beweises nun die Gleichung $C = C''$ nachweisen. Dann gilt das Lemma als bewiesen.

Zu Beginn müssen wir uns vergewissern, dass der Punkt $C'' = \epsilon \cdot \frac{A' \times B'}{\|A' \times B'\|}$ senkrecht auf A' und B' steht. Aufgrund der Definition des Vektorproduktes tritt dieser Fall ein. Aus selbigem Grund steht auch der Punkt C senkrecht auf $A' = \epsilon \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|}$ und auf $B' = \epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|}$. Daraus können wir nun schließen, dass entweder $C'' = C$ oder $C'' = -C$ gilt.
Für $\delta \in \{-1, 1\}$ gilt demnach

$$C'' = \delta \cdot C \qquad \text{(Resultat 1)}$$

Das ist ein sehr wichtiges Zwischenergebnis, welches wir im Rahmen des Beweises später wieder aufgreifen werden. Vorher müssen wir uns noch ein anderes Zwischenresultat erarbeiten! Dazu betrachten wir das Skalarprodukt $\langle A' \times B, C'' \rangle$. Ausgehend von diesem Skalarprodukt benützen wir die Definition von C''.

$$\langle A' \times B, C'' \rangle = \left\langle A' \times B', \epsilon' \cdot \frac{A' \times B'}{\|A' \times B'\|} \right\rangle$$

Die Bilinearität des Skalarproduktes erlaubt es uns ϵ' und $\|A' \times B'\|$ aus der zweiten Komponente herauszuziehen.

$$\langle A' \times B, C'' \rangle = \left\langle A' \times B', \epsilon' \cdot \frac{A' \times B'}{\|A' \times B'\|} \right\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \frac{\epsilon'}{\|A' \times B'\|} \cdot \langle A' \times B', A' \times B' \rangle$$

Nun verwenden wir die schon öfters verwendete Eigenschaft "$\forall P \in \mathbb{R}^3 : \langle P, P \rangle = \|P\|^2$".

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon'}{\|A' \times B'\|} \cdot \langle A' \times B', A' \times B' \rangle \overset{\forall P \in \mathbb{R}^3 : \langle P, P \rangle = \|P\|^2}{=} \frac{\epsilon'}{\cancel{\|A' \times B'\|}} \cdot \|A' \times B'\|^{\cancel{2}} \\ &= \epsilon' \cdot \|A' \times B'\| \end{aligned}$$

Aufgrund der Gleichheitskette die wir legen konnten gilt nun

$$\begin{aligned} &\langle A' \times B', C'' \rangle = \epsilon' \cdot \|A' \times B'\| \\ \Leftrightarrow\ &\epsilon' \cdot \|A' \times B'\| = \langle A' \times B', C'' \rangle \end{aligned}$$

Nun verwenden wir das Resultat 1 "$C'' = \delta \cdot C$".

$$\begin{aligned} \|A' \times B'\| \cdot \epsilon' &= \langle A' \times B', C'' \rangle \\ &\overset{\text{Reslultat1}}{=} \langle A' \times B', \delta \cdot C \rangle \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir A' sowie B'.

$$\langle A' \times B', \delta \cdot C \rangle = \left\langle \left(\underbrace{\epsilon \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|}}_{=A'} \times \underbrace{\epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|}}_{=B'} \right), \delta \cdot C \right\rangle$$

In der ersten Komponente des Skalarproduktes befindet sich ein Vektorprodukt. Da das Vektorprodukt bilinear ist, können wir reelle Zahlen aus dem Vektorprodukt, welches zusätzlich mithilfe der großen runden Klammer gekennzeichnet wurde, herausziehen. Dazu gehören die beiden ϵ, als auch die Normen.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\epsilon \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \times \epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|} \right), \delta \cdot C \right\rangle \\
\overset{\text{Bilinearität Vektorprd.}}{=} &\left\langle \underbrace{\epsilon^2}_{=1} \cdot \frac{1}{\|B \times C\|} \cdot \frac{1}{\|C \times A\|} \left((B \times C) \times (C \times A) \right), \delta \cdot C \right\rangle
\end{aligned}$$

Da auch das Skalarprodukt die Eigenschaft der Bilinearität besitzt, können wir reelle Zahlen von beiden seiner Komponenten heraus ziehen.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \underbrace{\frac{1}{\|B \times C\|} \cdot \frac{1}{\|C \times A\|}}_{\in \mathbb{R}} \left((B \times C) \times (C \times A) \right), \underbrace{\delta}_{\in \mathbb{R}} \cdot C \right\rangle \\
\overset{\text{Bilinearität Skp.}}{=} &\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle (B \times C) \times (C \times A), C \rangle
\end{aligned}$$

Nun setzen wir $D := C \times A$. Dadurch ist die Anwendung von Lemma 3 für die erste Komponente im Skalarprodukt leichter ersichtlich. Anschließend führen wir wieder eine Rücksubstitution aus.

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \left\langle (B \times C) \times (\underbrace{C \times A}_{=:D}), C \right\rangle \\
\overset{\text{Lemma 3}}{=} &\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle \langle B, D \rangle \cdot C - \langle C, D \rangle \cdot B, C \rangle \\
\overset{D=C \times A}{=} &\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle \langle B, C \times A \rangle \cdot C - \langle C, C \times A \rangle \cdot B, C \rangle
\end{aligned}$$

Da die Punkte $C \times A$ und C aufgrund der Definition des Vektorproduktes orthogonal zueinander sind, muss das Skalarprodukt $\langle C, C \times A \rangle$ gleich 0 sein. Weiters wissen wir, dass es sich bei dem Skalarprodukt $\langle B, C \times A \rangle$ um eine reelle Zahl handelt, die wir aufgrund der Bilinearität herausziehen dürfen.

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \left\langle \underbrace{\langle B, C \times A \rangle}_{\in \mathbb{R}} \cdot C - \underbrace{\langle C, C \times A \rangle}_{=0} \cdot B, C \right\rangle \\
= &\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle B, C \times A \rangle \cdot \langle C, C \rangle
\end{aligned}$$

Nun können wir $\langle C, C \rangle$ als $\|C\|^2$ schreiben. Da der Punkt C auf der Einheitskugel liegt, beträgt sein Abstand zum Nullpunkt genau 1. Daher gilt $\|C\|^2 = 1^2 = 1$. Zusätzlich

verwenden wir für das Skalarprodukt $\langle B, C \times A\rangle$ das Lemma 2.

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle B, C \times A\rangle \cdot \langle C, C\rangle \\ \overset{\text{Lemma 2}}{=} &\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \det(B, C, A) \cdot \underbrace{\|C\|^2}_{=1} \end{aligned}$$

Für den nächsten Schritt müssen wir uns daran erinnern, dass sich nur das Vorzeichen der Determinante einer Matrix ändert, falls zwei Spalten der Matrix miteinander vertauscht werden. Für die Determinante $\det(B, C, A)$ gilt also nun:

$$\det(B, C, A) = (-1) \cdot \det(A, C, B) = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{=1} \cdot \det(A, B, C) = \det(A, B, C)$$

Der nächste Beweisschritt sieht also wie folgt aus.

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \det(B, C, A) \\ =&\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \det(A, B, C) \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt nun aufgrund der entstandenen Gleichheitskette folgendes.

$$\|A' \times B'\| \cdot \epsilon' = \frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \det(A, B, C)$$

Aufgrund des Gleichheitszeichens müssen beide Seiten der Gleichung das selbe Vorzeichen besitzen. Daher gilt:

$$\operatorname{sign}\left(\|A' \times B'\| \cdot \epsilon'\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \det(A, B, C)\right)$$

Da die Normen $\|A' \times B'\|$, $\|B \times C\|$ und $\|C \times A\|$ aufgrund der Definition von Normen zwingend positive Zahlen sein müssen, würde sich nichts am Vorzeichen ändern, wenn wir sie einfach weglassen würden. Weiters können die drei Normen auch nicht 0 sein, da die drei Punkte A, B, C aufgrund der Annahme ein Kugeldreieck bilden und somit zwingend auf der Einheitskugel liegen. Daher können diese drei Punkte und ihre Vektorprodukte ungleich dem Nullpunkt sein. Folglich sind die Normen davon auch ungleich 0.

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\left(\underbrace{\|A' \times B'\|}_{>0} \cdot \epsilon'\right) &= \operatorname{sign}\left(\frac{\delta}{\underbrace{\|B \times C\|}_{>0} \cdot \underbrace{\|C \times A\|}_{>0}} \cdot \det(A, B, C)\right) \\ \Leftrightarrow \operatorname{sign}(\epsilon') &= \operatorname{sign}(\delta \cdot \det(A, B, C)) \end{aligned}$$

Nun benötigen wir noch eine nützliche Eigenschaft der Vorzeichenfunktion. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen. So gilt dann, $\operatorname{sign}(a \cdot b) = \operatorname{sign}(a) \cdot \operatorname{sign}(b)$. Man kann sich

von der Gültigkeit dieser Aussage selbst überzeugen, indem man die Aussage in drei Fälle spaltet. Ein Fall wäre zum Beispiel, dass a und b beide positive Zahlen wären. Ein weiterer Fall wäre, dass beide reellen Zahl negativ wären. Beim letzten Fall wäre eine Zahl positiv, wohingegen die andere Zahl negativ wäre. Wir gehen nun einen der drei Fälle gemeinsam durch.
Es seien a, b beide positive Zahlen, so gilt

$$\underbrace{\text{sign}(a \cdot b)}_{=1} = \underbrace{\text{sign}(a)}_{=1} \cdot \underbrace{\text{sign}(b)}_{=1}$$

Die Gleichung stimmt in diesem Fall also. Die anderen beiden Fälle lassen sich auch schnell überprüfen und werden daher dem Leser überlassen.
Nun wieder zurück zu unserem Beweis.

$$\begin{aligned} &\text{sign}(\epsilon') = \text{sign}(\delta \cdot \det(A, B, C)) \\ \Leftrightarrow\ &\text{sign}(\epsilon') = \text{sign}(\delta) \cdot \text{sign}(\det(A, B, C)) \end{aligned}$$

Bei $\text{sign}(\epsilon')$ als auch bei $\text{sign}(\delta)$ suchen wir nach Vorzeichen von Vorzeichen. Angenommen es sei $\epsilon' = (-1)$. Dann wäre $\text{sign}(\epsilon') = \text{sign}((-1)) = (-1) = \epsilon'$. Auch für die Annahme $\epsilon' = 1$ wäre $\text{sign}(\epsilon') = \epsilon'$. Selbiges stimmt auch für $\text{sign}(\delta)$. Es gilt daher ganz offensichtlich $\text{sign}(\epsilon') = \epsilon'$, sowie $\text{sign}(\delta) = \delta$. Wenn wir diese Überlegung im Zuge unseres Beweises verwenden, so erhalten wir die folgenden Zeilen.

$$\begin{aligned} &\text{sign}(\epsilon') = \text{sign}(\delta) \cdot \text{sign}(\det(A, B, C)) \\ \Leftrightarrow\ &\epsilon' = \delta \cdot \underbrace{\text{sign}(\det(A, B, C))}_{=\epsilon} \\ \Leftrightarrow\ &\epsilon' = \delta \cdot \epsilon \end{aligned} \qquad \text{(Resultat 2)}$$

Im Unterkapitel 18.2 auf Seite 76 konnten wir für $A, B, C \in \mathbb{S}^2$ zeigen, dass

$$\det(B \times C, C \times A, A \times B) = \det(B, C, A) \cdot \det(C, A, B)$$

gilt. Nun werden wir für jeweils beide Matrizen zweimal ihre Spalten vertauschen:

$$\det(B, C, A) \cdot \det(C, A, B) = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \det(A, B, C)}_{=\det(B,C,A)} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \det(A, B, C)}_{=\det(C,A,B)}$$

Glücklicherweise ergibt $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$. Daher gilt im folgenden:

$$(-1) \cdot (-1) \cdot \det(A, B, C) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \det(A, B, C) = \det(A, B, C)^2$$

Die Determinante $\det(A, B, C)$ muss ungleich 0 sein, da (A, B, C) laut Annahme ein Kugeldreieck ist und die Eckpunkte A, B, C demnach nicht gemeinsam mit dem Nullpunkt auf einer Ebene liegen können. Da es sich bei der Determinante $\det(A, B, C)$ um eine reelle Zahl handelt, ist das Quadrat $\det(A, B, C)^2$ folglich eine positive Zahl! Es gilt also nun zusammenfassend folgende Ungleichung.

$$\det(B \times C, C \times A, A \times B) = \det(A, B, C)^2 > 0 \qquad \text{(Resultat 3)}$$

Diese Ungleichung werden wir nun gleich wieder benötigen. Nun betrachten wir jedoch das Vorzeichen ϵ'.

$$\epsilon' = \text{sign}(\det(A', B', C'))$$

Nun verwenden wir die Definitionen von A, B und C.

$$\text{sign}(\det(A', B', C')) \overset{\text{Definitionen}}{=} \text{sign}\left(\det\left(\epsilon \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|}, \epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \epsilon \cdot \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right)\right)$$

Nun verwenden wir die Linearität von Determinanten um reelle Zahlen spaltenweise aus der Determinante herausziehen zu können. Diese Eigenschaft wurde im Kapitel 4 "Matrizen und Determinanten" auf Seite 14 besprochen.

$$\begin{aligned} &\text{sign}\left(\det\left(\epsilon \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|}, \epsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \epsilon \cdot \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right)\right) \\ \overset{\text{Linearität}}{=} &\text{sign}\left(\frac{\epsilon^3}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|} \cdot \det(B \times C, C \times A, A \times B)\right) \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir die Eigenschaft, dass das Vorzeichen eines Produktes gleich dem Produkt der Vorzeichen der Faktoren ist.

$$\begin{aligned} &\text{sign}\left(\frac{\epsilon^3}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|} \cdot \det(B \times C, C \times A, A \times B)\right) \\ =&\text{sign}\left(\frac{\epsilon^3}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|}\right) \cdot \text{sign}\left(\det(B \times C, C \times A, A \times B)\right) \end{aligned}$$

Aufgrund des Resultats 3 gilt die Ungleichung $\det(B \times C, C \times A, A \times B) > 0$. Daher muss das Vorzeichen $\text{sign}(\det(B \times C, C \times A, A \times B))$ gleich 1 sein.

$$\begin{aligned} &\text{sign}\left(\frac{\epsilon^3}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|}\right) \cdot \text{sign}\left(\det(B \times C, C \times A, A \times B)\right) \\ =&\text{sign}\left(\frac{\epsilon^3}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|}\right) \cdot 1 \end{aligned}$$

Das uns gebliebene Vorzeichen können wir wieder aufteilen!

$$\begin{aligned} &\text{sign}\left(\frac{\epsilon^3}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|}\right) \\ =&\text{sign}(\epsilon^3) \cdot \text{sign}\left(\frac{1}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|}\right) \end{aligned}$$

Wir wissen, dass ϵ entweder 1 oder (-1) sein kann. ϵ^3 ist daher entweder $1^3 = 1$ oder $(-1)^3 = (-1)$. Daher gilt schließlich $\epsilon^3 = \epsilon$. Weiters muss der Quotient $\frac{1}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|}$,

aufgrund der drei Normen, positiv sein. Somit können wir den folgenden Rechenschritt ausführen.

$$\operatorname{sign}(\underbrace{\epsilon^3}_{=\epsilon}) \cdot \operatorname{sign}\left(\underbrace{\frac{1}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\| \cdot \|A \times B\|}}_{>0}\right) = \operatorname{sign}(\epsilon) \cdot 1$$

Wie schon einmal erwähnt wurde, muss $\operatorname{sign}(\epsilon) = \epsilon$ gelten.
Somit ist es uns nun gelungen, eine Gleichungskette von ϵ' nach ϵ zu legen. Zusammenfassend konnten wir also nun die Gleichung

$$\epsilon' = \epsilon$$

erfolgreich nachweisen. Da ja noch zusätzlich das Resultat 2

$$\epsilon' = \delta \cdot \epsilon$$

eine wahre Aussage ist, muss daraus $\delta = 1$ folgen .
Wenn wir also nun für δ die Zahl 1 in unser erstes Resultat einsetzen, sind wir am Ende des Beweises angelangt.

$$C'' = \delta \cdot C$$
$$\overset{\delta=1}{\Leftrightarrow} C'' = C$$

Wie schon erwähnt, können wir analog $A'' = A$, sowie $B'' = B$ zeigen. Daher ist (A, B, C) das Polardreieck zu (A', B', C'), falls (A', B', C') das Polardreieck zu (A, B, C). □

An dieser Stelle möchte ich nun die schon erarbeiteten Eigenschaften des Polardreiecks übersichtlich auflisten. Dazu sei (A, B, C) ein sphärisches Dreieck.

P1 Falls (A', B', C') das Polardreieck zu (A, B, C) ist, so ist (A, B, C) das Polardreieck zu (A', B', C')..

P2 $a' = \pi - \alpha, \quad b' = \pi - \beta\ , \quad c' = \pi - \gamma$

Diese beiden Eigenschaften können wir nun noch zu einer sehr nützlichen dritten Eigenschaft kombinieren.

$$a \overset{\text{P1}}{=} a'' \overset{\text{P2}}{=} \pi - \alpha'$$

also folgt daraus

$$\alpha' = \pi - a$$

und analog

$$\beta' = \pi - b$$
$$\gamma' = \pi - c$$

Dieser Zusammenhänge werden den Beweis des Winkelkosinussatzes immens kürzen.

Teil III.
Sphärische Trigonometrie

Auch für diesen Teil wurden sämtliche Definitionen und Beweisideen dem Vorlesungsskriptum von Christian Bär entnommen. [Bär08, S. 133 - 137]
Der Aufbau des Teils orientiert sich hingegen stark an der Herangehensweise von Berthold Schuppar. [Sch17, S. 63 - 74]

In der ebenen - als auch in der sphärischen Geometrie besitzen Dreiecke insgesamt sechs Größen, die sich in drei Seiten und drei Winkel enteilen lassen. In der ebenen Geometrie ist es immer möglich, die fehlenden Größen eines Dreiecks zu berechnen, wenn mindestens drei Größen bekannt sind. Das funktioniert auch bedingt für Kugeldreiecke. Den Umstand, nur drei Größen zu kennen, werden wir als Problem bezeichnen, welches es zu lösen gilt, indem die fehlenden Größen berechnet werden. Dabei existieren unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten von gegebenen Größen. Diese Möglichkeiten versehen wir mit geeigneten Kürzel, hinter denen eine gewisse Logik steht.

Insgesamt gibt es sechs Möglichkeiten:

"WWW" Drei Winkel sind bekannt.

"SSS" Drei Seiten sind bekannt.

"SWS" Zwei Seiten und deren eingeschlossener Winkel sind bekannt.

"WSW" Zwei Winkel und deren eingeschlossene Seite sind bekannt.

"SWW" Eine Seite, ein anliegender Winkel und der gegenüberliegende Winkel sind bekannt.

"SSW" Zwei Seiten und ein davon nicht eingeschlossener Winkel sind bekannt.

Im Laufe dieses dritten Teiles werden wir nun hilfreiche Sätze kennenlernen, welche uns dabei behilflich sein werden, unsere sechs aufgelisteten Probleme lösen zu können.

20. Seitenkosinussatz der sphärischen Geometrie

Wir beginnen mit dem Fall "SWS". Wir haben also zwei Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel gegeben. Wir kennen also zum Beispiel a, b und γ. Abbildung 25 auf Seite 92 visualisiert dieses Beispiel. Mithilfe des Seitenkosinussatzes können wir mithilfe der drei gegebenen Größen die fehlende Seite c ausrechnen.

Satz 8. *Für die Seitenlängen a, b, c und für die Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreiecks*

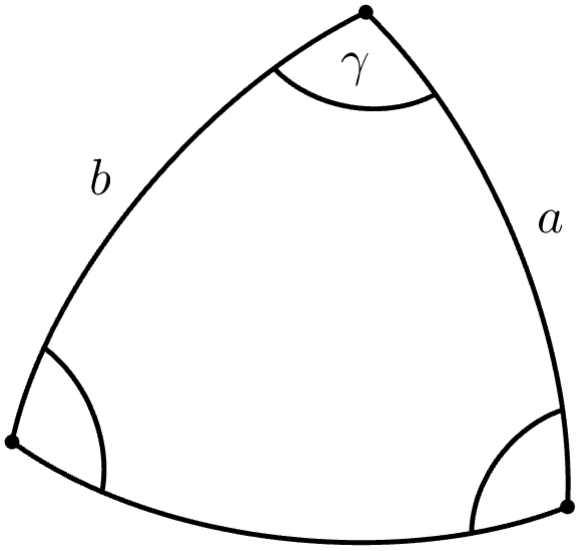


Abbildung 25: Beispiel zu "SWS"

gilt:

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(b)\cdot\cos(c) + \sin(b)\cdot\sin(c)\cdot\cos(\alpha),\\ \cos(b) &= \cos(a)\cdot\cos(c) + \sin(a)\cdot\sin(c)\cdot\cos(\beta),\\ \cos(c) &= \cos(a)\cdot\cos(b) + \sin(a)\cdot\sin(b)\cdot\cos(\gamma).\end{aligned}$$

Mithilfe der dritten Gleichung können wir nun unser konkretes lösen. Damit können wir nun den Funktionswert vom Kosinus bezüglich c berechnen. Nach der Anwendung des Arkuskosinus erhalten wir die fehlende Seite c.
Nun werden wir den Seitenkosinussatz beweisen.

Beweis. Es genügt nur eine der drei Gleichungen zu beweisen. Die beiden anderen Gleichungen lassen sich komplett analog zeigen. Es wird die dritte Gleichung gezeigt.
Wir betrachten das Skalarprodukt der beiden Vektorprodukte $C \times A$ und $C \times B$. Im ersten Beweisschritt verwenden wir die Gleichung (KS), welche wir auf Seite 52 hergeleitet haben.

$$\langle C \times A, C \times B\rangle \overset{(\mathrm{KS})}{=} \|C \times A\| \cdot \|C \times B\| \cdot \cos(\sphericalangle(C \times A, C \times B))$$

Da die Punkte A, B, C auf der Einheitskugel liegen, gelten die Gleichungen "$\|C \times A\| = \sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, C)$" und "$\|C \times B\| = \sin(d_{\mathbb{S}^2}(B, C)$". Weiters verwenden wir das "Winkellemma" für den Winkel γ.

$$\|C \times A\| \cdot \|C \times B\| \cdot \cos(\underbrace{\sphericalangle(C \times A, C \times B)}_{=\gamma}) = \sin(d_{\mathbb{S}^2}(A, C)) \cdot \sin(d_{\mathbb{S}^2}(B, C)) \cdot \cos(\gamma)$$

Der sphärische Abstand von A nach C bzw. von B nach C ist gerade die Seite b bzw. die Seite a. Es gilt also:

$$\sin(\underbrace{d_{\mathbb{S}^2}(A,C)}_{=b}) \cdot \sin(\underbrace{d_{\mathbb{S}^2}(B,C)}_{=a}) \cdot \cos(\gamma) = \sin(b) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\gamma)$$

Es gilt also demnach zusammenfassend:

$$\langle C \times A, C \times B \rangle = \sin(b) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\gamma) \qquad \text{(Gleichung 1)}$$

Nun betrachten wir nochmal das Skalarprodukt $\langle C \times A, C \times B \rangle$. Jedoch schlagen wir diesmal einen anderen Rechenweg ein. Diesmal verwenden wir zu Beginn das Lemma 4.

$$\langle C \times A, C \times B \rangle \overset{\text{Lemma 4}}{=} \langle C, C \rangle \cdot \langle A, B \rangle - \langle A, C \rangle \cdot \langle C, B \rangle$$

Nun haben wir vier Skalarprodukte erhalten. Der nächste Rechenschritt wird ein wenig aufwendig. Wir benützen nun für jedes dieser vier Skalarprodukte, die Gleichung (KS) von Seite 52. Zum Beispiel gilt nun $\langle C, C \rangle = \cos(\sphericalangle(C,C)) \cdot \|C\| \cdot \|C\|$. Diese Identität benutzen wir nun für jedes der vier vorkommenden Skalarprodukte unseres Beweises. Es gilt demnach:

$$\begin{aligned}
&\langle C, C \rangle \cdot \langle A, B \rangle - \langle A, C \rangle \cdot \langle C, B \rangle \\
=\ &(\cos(\sphericalangle(C,C)) \cdot \|C\| \cdot \|C\|) \cdot (\cos(\sphericalangle(A,B)) \cdot \|A\| \cdot \|B\|) \\
-\ &(\cos(\sphericalangle(A,C)) \cdot \|A\| \cdot \|C\|) \cdot (\cos(\sphericalangle(C,B)) \cdot \|C\| \cdot \|B\|)
\end{aligned}$$

Diese üppige Differenz können wir leicht abspecken. Da die Eckpunkte A, B, C des sphärischen Dreiecks auf der Einheitskugel liegen, beträgt deren Abstand zum Nullpunkt genau 1. Daher gilt $\|A\| = \|B\| = \|C\| = 1$. Weiters ist der Winkel $\sphericalangle(C,C)$ trivialerweise 0. Es gilt also nun:

$$\begin{aligned}
&(\cos(\sphericalangle(C,C)) \cdot \|C\| \cdot \|C\|) \cdot (\cos(\sphericalangle(A,B)) \cdot \|A\| \cdot \|B\|) \\
-\ &(\cos(\sphericalangle(A,C)) \cdot \|A\| \cdot \|C\|) \cdot (\cos(\sphericalangle(C,B)) \cdot \|C\| \cdot \|B\|) \\
=\ &\underbrace{\cos(0)}_{=1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\underbrace{\sphericalangle(A,B)}_{=c} \cdot 1 \cdot 1) - \cos(\underbrace{\sphericalangle(A,C)}_{=b}) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\underbrace{\sphericalangle(C,B)}_{=a} \cdot 1 \cdot 1 \\
=\ &\cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a)
\end{aligned}$$

Aufgrund unserer alternativen Vorgehensweise konnten wir nun folgende Gleichung errechnen.

$$\langle C \times A, C \times B \rangle = \cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a) \qquad \text{(Gleichung 2)}$$

Einerseits gilt also nun "Gleichung 1"

$$\langle C \times A, C \times B \rangle = \sin(b) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\gamma)$$

und andererseits gilt nun auch "Gleichung 2"

$$\langle C \times A, C \times B \rangle = \cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a).$$

Diese beiden Gleichungen können wir nun sehr zielbringend kombinieren.

$$\sin(b) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\gamma) \overset{\text{Gleichung 1}}{=} \langle C \times A, C \times B \rangle \overset{\text{Gleichung 2}}{=} \cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a)$$

Zusammenfassend gilt also nun folgende Zeile.

$$\sin(b) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a)$$

Schlussendlich lösen wir noch nach $\cos(c)$ auf und konnten somit die dritte Gleichung des Seitenkosinussatzes beweisen.

$$\begin{aligned} &\sin(b) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) - \cos(b) \cdot \cos(a) \\ \Leftrightarrow\ &\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

□

Konkret kann man zur Lösung unseres Beispiels "SWS" die dritte Gleichung des Satzes verwenden und somit die dritte Seite c des Kugeldreiecks berechnen. Anschließend kann man mithilfe der ersten Gleichung, nach einer kurzen Äquivalenzumformung, den Winkel α berechnen. Selbiges Vorgehen bezüglich der zweiten Gleichung liefert den Winkel β und somit die letzte fehlende Größe des Kugeldreiecks.

Weiters kann mithilfe des Seitenkosinussatzes auch das Problem "SSS" gelöst werden. Es sind dort alle drei Seiten gegeben. Man kann durch Umformen der Gleichungen die fehlenden Winkel berechnen.

Zusammenfassend sind also die Probleme "SWS" und "SSS" mithilfe des Seitenkosinussatzes der sphärischen Geometrie lösbar.

- "WWW"
- ~~"SSS"~~
- ~~"SWS"~~
- "WSW"
- "SWW"
- "SSW"

Es fehlen uns also noch vier ungelöste Probleme.

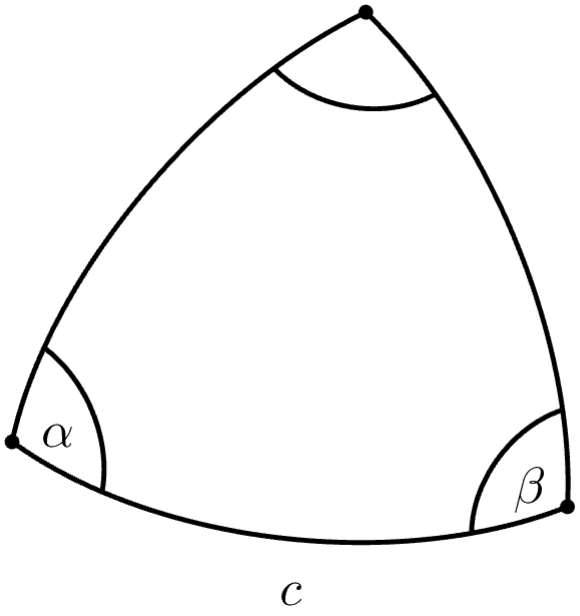


Abbildung 26: Beispiel zu "WSW"

21. Winkelkosinussatz der sphärischen Geometrie

Wir betrachten nun das Problem "WSW". Hier haben wir zwei Winkel und die davon eingeschlossene Seite gegeben. Zum Beispiel kennen wir die beiden Winkel α, β und die davon eingeschlossene Seite c. Die Abbildung 21 auf Seite 95 veranschaulicht dieses Beispiel.
Mithilfe des Winkelkosinussatzes der sphärischen Geometrie können wir das "WSW" - Problem lösen und den fehlenden dritten Winkel berechnen. Bei unserem Beispiel wäre das konkret der Winkel γ.

Satz 9. *Für die Seitenlängen a, b, c und für die Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreiecks gilt:*

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cos(a) \cdot \sin(\gamma)\sin(\beta) - \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta),\\ \cos(\beta) &= \cos(b) \cdot \sin(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma),\\ \cos(\gamma) &= \cos(c) \cdot \sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta).\end{aligned}$$

Beweis. Wir betrachten nun das Polardreieck (A', B', C') zu dem Dreieck (A, B, C) und wenden den schon gezeigten Seitenkosinussatz darauf an. Es gilt also:

$$\cos(c') = \cos(a') \cdot \cos(b') + \sin(a') \cdot \sin(b') \cdot \cos(\gamma')$$

Nun verwenden wir die speziellen Eigneschaften $(P2)$ und $(P3)$, welche wir im Kapitel 19.3 "Eigenschaften eines Polardreiecks" ab Seite 83 bewiesen haben. Es gelten demnach die Beziehungen

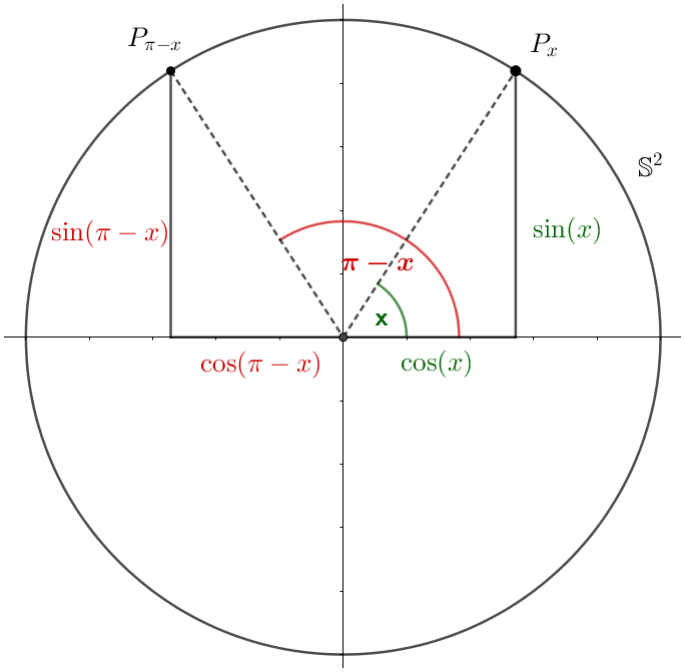


Abbildung 27: Skizze zum Beweis des Winkelkosinussatzes

(P2) $a' = \pi - \alpha, \qquad b' = \pi - \beta, \qquad c' = \pi - \gamma$

(P3) $\gamma' = \pi - c$

Für uns bedeutet das nun folgendes.

$$\begin{aligned} &\cos(c') = \cos(a') \cdot \cos(b') + \sin(a') \cdot \sin(b') \cdot \cos(\gamma') \\ \overset{(P2),(P3)}{\Leftrightarrow} &\cos(\pi - \gamma) = \cos(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - c) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt benötigen wir eine Eigenschaft der Sinus - und Kosinusfunktion. Dazu betrachten wir den Einheitskreis auf Seite 96. Dieser soll die Gültigkeit der Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(\pi - x) = -\cos(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

untermauern. Im nächsten Rechenschritt können wir diese beiden Aussagen wie folgt einbauen.

$$\begin{aligned} &\cos(\pi - \gamma) = \cos(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - c) \\ \Leftrightarrow\ &-\cos(\gamma) = (-\cos(\alpha)) \cdot (-\cos(\beta)) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot (-\cos(c)) \\ \Leftrightarrow\ &(-1) \cdot \cos(\gamma) = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{=1} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + (-1) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(c) \end{aligned}$$

Nun teilen wir noch beide Seiten der Gleichung durch (-1) und erhalten dadurch genau die dritte Gleichung des Winkelkosinussatzes.

$$\begin{aligned}
&(-1)\cdot\cos(\gamma) = (-1)\cdot(-1)\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + (-1)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(c)\\
\overset{:(-1)}{\Leftrightarrow}\ &\frac{\cancel{(-1)}\cdot\cos(\gamma)}{\cancel{(-1)}} = \frac{\cancel{(-1)}\cdot(-1)\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\cancel{(-1)}} + \frac{\cancel{(-1)}\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(c)}{\cancel{(-1)}}\\
&\Leftrightarrow \cos(\gamma) = \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(c) - \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)
\end{aligned}$$

Auf komplett analoge Weise können die beiden anderen Gleichungen des Satzes bewiesen werden. □

Der Winkelkosinussatz der sphärischen Geometrie besitzt gegenüber dem Winkelkosinussatzes der ebenen Geometrie einen Vorteil. Indem man zum Beispiel die erste Gleichung des sphärischen Winkelkosinussatzes nach $\cos(a)$ umformt, kann man die Seite a aus den drei Winkeln α, β, γ errechnen. Das kann man natürlich auch für die anderen Seiten b, c erreichen. Demnach ist es also mithilfe des Winkelkosinussatzes möglich, das Problem "WWW" zu lösen. Das heißt man kann drei fehlende Seiten berechnen, wenn man die drei Winkel kennt. Demnach ist ein Kugeldreieck auch durch seine drei Winkel eindeutig bestimmt. Es soll nochmals erwähnt werden, dass das auf ebene Dreiecke nicht zutrifft.

Mithilfe des Winkelkosinussatzes der sphärischen Geometrie können wir das Problem "WSW", als auch das Problem "WWW" lösen.

- ~~"WWW"~~
- ~~"SSS"~~
- ~~"SWS"~~
- ~~"WSW"~~
- "SWW"
- "SSW"

Es fehlen uns damit nur mehr zwei Probleme.

22. Sinussatz der sphärischen Geometrie

Die beiden ungelösten Probleme "SWW" und "SSW" können mit dem Sinussatz der sphärischen Geometrie teilweise gelöst werden.

Satz 10. *Für die Seiten a, b, c und für die Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreiecks (A, B, C) gilt*

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Beweis. Wir betrachten zu Beginn die Norm $\|(A \times C) \times (A \times B)\|$. Im allerersten Schritt wenden wir das Lemma 4 auf das Vektorprodukt $(A \times C) \times (A \times B)$ an.

$$\|(A \times C) \times (A \times B)\| \overset{\text{Lemma 4}}{=} \|\langle A, A \times B\rangle \cdot C - \langle C, A \times B\rangle \cdot A\|$$

Da die Gerade, die von A erzeugt wird, senkrecht auf der von $A \times B$ erzeugten Gerade steht, nimmt das Skalarprodukt $\langle A, A \times B\rangle$ den Wert 0 an.

$$\left\| \underbrace{\langle A, A \times B\rangle}_{=0} \cdot C - \langle C, A \times B\rangle \cdot A \right\| = \|- \langle C, A \times B\rangle \cdot A\|$$

Die Eigenschaft $(N2)$ einer Norm besagt, dass man stets reelle Zahlen im Betrag aus der Norm ziehen kann. Es gilt also demnach:

$$\left\| \underbrace{- \langle C, A \times B\rangle}_{\in \mathbb{R}} \cdot A \right\| \overset{(N2)}{=} | - \langle C, A \times B\rangle | \cdot \|A\|$$

Da der Punkt A auf der Einheitskugel liegt, ist sein Abstand zum Nullpunkt gleich 1. Daher gilt $\|A\| = 1$. Zusätzlich können wir aufgrund des Betrags das Minuszeichen darin weg lassen.

$$| - \langle C, A \times B\rangle | \cdot \|A\| = | \langle C, A \times B\rangle | \cdot 1 = | \langle C, A \times B\rangle |$$

Im nächsten Schritt verwenden wir das Lemma 2.

$$| \langle C, A \times B\rangle | \overset{\text{Lemma 2}}{=} |\det(C, A, B)|$$

Nun vertauschen wir zweimal die Spalten der Matrix.

$$|\det(C, A, B)| = |(-1) \cdot (-1) \cdot \det(A, B, C)| = |\det(A, B, C)|$$

Zusammenfassend gilt also nun:

$$\|(A \times C) \times (A \times B)\| = |\det(A, B, C)| \qquad \text{(Gleichung 1)}$$

Dieses Ergebnis merken wir uns nun für einen Augenblick. Wir betrachten wiederum die Norm $\|(A \times C) \times (A \times B)\|$. Diesmal kommt jedoch Satz 5 auf Seite 53 zum Einsatz. Daher gilt nun:

$$\|(A \times C) \times (A \times B)\| \overset{\text{Satz 5}}{=} \|A \times C\| \cdot \|A \times B\| \cdot \sin(\sphericalangle(A \times C, A \times B))$$

Da die Punkte A, B, C allesamt auf der Einheitskugel liegen, können wir zum Beispiel statt $\|A \times C\|$ den Funktionswert $\sin(\sphericalangle(A, C))$ schreiben. Diese Möglichkeit erarbeiteten wir uns im Unterkapitel 15.3 "M3" auf Seite 64 her. Daher schreiben wir nun:

$$\|A \times C\| \cdot \|A \times B\| \cdot \sin(\underbrace{\sphericalangle(A \times C, A \times B)}_{=\alpha}) = \sin(\sphericalangle(A, C)) \cdot \sin(\sphericalangle(A, B)) \cdot \sin(\alpha)$$

Nun erinnern wir uns an die Definition des sphärischen Dreiecks zurück. Die Seite $b = \widehat{A,C}$ ist gleich dem sphärischen Abstand $d_{\mathbb{S}^2}(A,C)$. Der sphärische Abstand kann jedoch immer als Winkel interpretiert werden. Es gilt also $d_{\mathbb{S}^2}(A,C) = \sphericalangle(A,C) = b$. Für unseren Beweis bedeutet dies nun:

$$\sin(\sphericalangle(A,C)) \cdot \sin(\sphericalangle(A,B)) \cdot \sin(\alpha) = \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \sin(\alpha)$$

Zusammenfassend gilt demnach folgende Gleichung.

$$\|(A \times C) \times (A \times B)\| = \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \sin(\alpha) \qquad \text{(Gleichung 2)}$$

Nun können wir "Gleichung 1" mit "Gleichung 2" kombinieren.

$$\begin{aligned} \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \sin(\alpha) \overset{\text{Gleichung2}}{=} \|(A \times C) \times (A \times B)\| &\overset{\text{Gleichung1}}{=} |\det(A,B,C)| \\ \Rightarrow \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \sin(\alpha) &= |\det(A,B,C)| \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Norm $\|(B \times A) \times (B \times C)\|$ bzw. die Norm $\|(C \times B) \times (C \times A)\|$. Durch analoges Vorgehen erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \sin(\beta) = |\det(B,C,A)| &\overset{\text{Spalten vertauschen}}{=} |\det(A,B,C)| \\ \Leftrightarrow \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \sin(\beta) &= |\det(A,B,C)| \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \sin(\gamma) = |\det(C,A,B)| &\overset{\text{Spalten vertauschen}}{=} |\det(A,B,C)| \\ \Leftrightarrow \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \sin(\gamma) &= |\det(A,B,C)| \end{aligned}$$

. Somit stellten wir den Betrag der Determinante $\det(A,B,C)$ als drei verschiedene Produkte dar. Diese drei Produkte sind demnach gleich! Es gilt also

$$\sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \sin(\alpha) = \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \sin(\beta) = \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \sin(\gamma)$$

Nun möchten wir die erhaltene Gleichungskette durch $\sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \sin(c)$ teilen. Daher darf das Produkt $\sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \sin(c)$ nicht gleich 0 sein. Dieses ist genau dann 0, falls mindestens einer der drei Faktoren 0 ist. Da es sich bei (A,B,C) jedoch um ein Kugeldreieck handelt, befinden sich dessen Seiten a,b,c im Intervall $(0,\pi)$. Praktischerweise bildet die Sinusfunktion keine Zahl aus diesem Intervall auf die 0 ab. Folglich sind die Funktionswerte $\sin(a), \sin(b), \sin(c)$ und somit auch deren Produkt ungleich 0. Eine Division durch dieses Produkt kann demnach problemlos durchgeführt werden.
Dabei erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{\sin(b)} \cdot \cancel{\sin(c)} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(a) \cdot \cancel{\sin(b)} \cdot \cancel{\sin(c)}} = \frac{\cancel{\sin(c)} \cdot \cancel{\sin(a)} \cdot \sin(\beta)}{\cancel{\sin(a)} \cdot \sin(b) \cdot \cancel{\sin(c)}} = \frac{\cancel{\sin(a)} \cdot \cancel{\sin(b)} \cdot \sin(\gamma)}{\cancel{\sin(a)} \cdot \cancel{\sin(b)} \cdot \sin(c)} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}. \end{aligned}$$

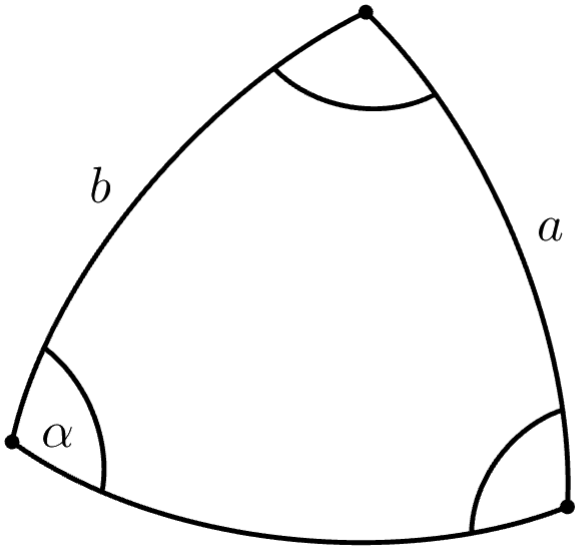


Abbildung 28: Beispiel zu "SSW"

Da sich die Winkel α, β, γ sowie die Seiten a, b, c auch im Intervall $(0, \pi)$ befinden, können wir ohne weiteres den Kehrwert bilden. Das heißt, dass wir die Quotienten umgangssprachlich einfach umdrehen. Das Gleichheitszeichen bleibt dabei bestehen.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)} \\ \overset{\text{Kehrwert}}{\Leftrightarrow} & \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} \end{aligned}$$

Bei diesen Gleichungen handelt es sich genau um die Aussage des Sinussatzes der sphärischen Geometrie. □

Wir stehen nun vor dem "SSW" - Problem und versuchen es zu lösen. Zum Beispiel sind die Seiten a,b, sowie der Winkel α gegeben. Die Skizze 28 auf Seite 100 zeigt die gegebenen Größen. Mithilfe des Sinussatzes können wir uns nun den Sinus von β berechnen.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} \\ \Leftrightarrow & \sin(\beta) = \frac{\sin(b) \cdot \sin(\alpha)}{\sin(a)} \end{aligned}$$

Um β eindeutig berechnen zu können, müssten wir die Umkehrfunktion des Sinus verwenden. Es werden jedoch immer zwei Elemente aus $(0, \pi)$ bezüglich der Sinusfunktion auf eine Zahl abgebildet. Ein Funktionswert des Sinus hat also zwei Urbilder in $(0, \pi)$. Die Definition einer Umkehrfunktion mithilfe einer Einschränkung auf $(0, \pi)$ macht daher keinen Sinn. Lange Rede kurzer Sinn: Es gibt auf dem Intervall $(0, \pi)$, in welchem

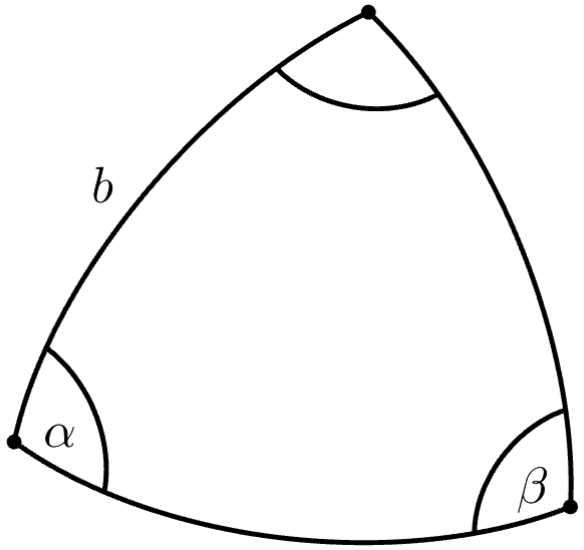


Abbildung 29: Beispiel zu "SWW"

sich die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks bewegen, zwei Winkel die das selbe Bild bezüglich der Sinusfunktion besitzen. Es gibt daher also zwei mögliche Winkel β, einen spitzen und einen stumpfen. Manchmal kann man aus dem Kontext erkennen, welcher der beiden Winkel nun der richtige ist, jedoch muss man immer mit zwei Lösungen rechnen.
Vor das gleiche Problem stellt uns der Fall "SWW". Zum Beispiel ist die Seite b und die Winkel α und β gegeben. Das Beispiel wird durch die Skizze 29 auf Seite 101 dargestellt. Mit Hilfe des Sinussatzes können wir uns $\sin(a)$ berechnen.

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)}$$
$$\Leftrightarrow \sin(a) = \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(b)}{\sin(\beta)}$$

Aber auch hier können wir die Seite a nicht eindeutig bestimmen. Es existieren in diesem Fall einfach zwei Dreiecke, die den Sinussatz erfüllen.

Neben diesem Eindeutigkeitsproblem gibt es noch ein weiteres Problem, welches wir mit den drei zentralen Sätzen gar nicht lösen können.
Angenommen es sind zwei Seiten a, b und die jeweiligen Gegenwinkel α, β bekannt. So gibt es momentan noch keine Möglichkeit, die restliche Seite c und ihren Gegenwinkel γ zu berechnen. Im ebenen Fall, könnte man sich den dritten Winkel mithilfe der Winkelsumme berechnen, worauf die dritte Seite dann leicht bestimmbar ist. Wie wir schon wissen, ist diese Vorgehensweise für ein sphärisches Dreieck nicht möglich, da die Winkelsumme nicht fest ist.

Daher benötigen wir einen alternativen Lösungsweg, welchen wir mithilfe von rechtwinkligen Kugledreicken bis zu einem bestimmten Grad finden werden.

23. Rechtwinkliges Kugeldreieck

Definition 15. *Wir nennen ein sphärisches Dreieck (A, B, C) rechtwinklig, falls $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Die dem rechten Winkel γ einschließenden Seiten nennen wir Katheten, die Gegenseite heißt Hypotenuse.*

An dieser Stelle muss noch erwähnt werden, dass es rechtwinklige Kugeldreiecke gibt, welche auch zwei oder drei rechte Winkel besitzen können. In der sphärischen Geometrie ist dies durchaus möglich. Weiters existieren auch noch rechtseitige sphärische Dreiecke. Diese besitzen mindestens eine Seite, die gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Ganz interessant sind sphärische Dreiecke, die rechtwinklig als auch rechtseitig sind. Solche Mischformen weisen ein hohes Maß an Besonderheit auf, was sich auch bei Berechnungen ihrer fehlenden Größen deutlich bemerkbar macht. Das heißt, dass für manche dieser speziellen Dreiecke gar keine Möglichkeit besteht, deren fehlenden Größen zu bestimmen. Wir sparen diese Spezialfälle also vorerst aus und betrachten diese dann separat. Wenn wir also folglich von rechtwinkligen Dreiecken sprechen, dann besitzt dieses Dreieck nur einen rechten Winkel, nämlich $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und keine rechte Seite.

Da wir für rechtwinklige Kugeldreiecke den Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2}$ schon kennen, gibt es nur mehr fünf unbekannte Größen. Es gilt also nun für rechtwinklige Kugeldreiecke, dass wir nur zwei von fünf Größen kennen müssen, um alle Restlichen berechnen zu können. Dazu benötigen wir die sogenannten "Neper'schen Formeln". Diese werden wir uns nun im nächsten Kapitel herleiten.

23.1. Neper'sche Formeln

Es sei (A, B, C) ein Kugeldreieck mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha, \beta, a, b, c \neq \frac{\pi}{2}$. Vier von sechs der "Neper'schen Formeln" können wir uns herleiten, indem wir mithilfe der bekannten Größe $\gamma = \frac{\pi}{2}$ den Seitenkosinussatz, den Winkelkosinussatz, sowie den Sinussatz vereinfachen.

Aus der dritten Gleichung des Seitenkosinussatzes können wir folgendes erschließen.

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma) \\ \overset{\gamma=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \\ \Leftrightarrow \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \end{aligned} \tag{22.1}$$

Diese Gleichung wurde im Sinne der Übersicht mit (22.1) gekennzeichnet, da es sich um die erste Gleichung im 22. Kapitel handelt.

Aus der ersten Gleichung des Winkelkosinussatzes folgern wir (22.2).

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha) = \cos(a)\cdot\sin(\gamma)\cdot\sin(\beta) - \cos(\gamma)\cdot\cos(\beta)\\
\overset{\gamma=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\ &\cos(\alpha) = \cos(a)\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\cdot\sin(\beta) - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\cdot\cos(\beta)\\
\Leftrightarrow\ &\cos(\alpha) = \cos(a)\cdot\sin(\beta) \qquad (22.2)
\end{aligned}$$

Weiters können wir eine der sechs "Neper'schen Formeln" aus der dritten Gleichung des Winkelkosinussatzes folgern.

$$\begin{aligned}
&\cos(\gamma) = \cos(c)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\\
\overset{\gamma=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\ &\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = \cos(c)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\\
\overset{+\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\Leftrightarrow}\ &\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \cos(c)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Nun teilen wir beide Seiten der Gleichung durch das Produkt $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$. Dieses Produkt kann nicht 0 werden. Dazu müsste $\cos(\alpha)$ und/oder $\cos(\beta)$ gleich 0 sein. Das kann jedoch nicht passieren, da $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ mit $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}$ gilt. Zur Erinnerung möchte ich erwähnen, dass sich alle Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks im offenen Intervall $(0, \pi)$ befinden. Auf diesem offenen Intervall wird nur $\frac{\pi}{2}$ bezüglich der Kosinusfunktion auf den Wert 0 abgebildet. Diesen Wert haben wir jedoch in den Voraussetzungen ausgenommen. Daher können wir ohne weitere Bedenken durch das besagte Produkt teilen.

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \cos(c)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \overset{:\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\Leftrightarrow} \underbrace{\frac{\cancel{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}{\cancel{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}}_{=1} = \frac{\cos(c)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}$$

Nachdem wir die linke Seite der Gleichung gewinnbringend vereinfacht haben, verwenden wir die Definition des Tangens.

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ &1 = \cos(c)\cdot\underbrace{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}_{=:\tan(\alpha)}\cdot\underbrace{\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}_{=:\tan(\beta)}\\
\Leftrightarrow\ &1 = \cos(c)\cdot\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta) \qquad (22.3)
\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus dem Sinussatz:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} \\ \overset{\gamma=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} & \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(c)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \sin(c) \end{aligned}$$

Nun erweitern wir beide Seiten der Gleichung mit dem Quotienten $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(c)}$. Dieser Quotient existiert immer, da $\sin(c)$ nicht 0 sein kann. Die Sinusfunktion nimmt auf dem offenen Intervall $(0, \pi)$ niemals den Wert 0 an.

$$\begin{aligned} \overset{\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(c)}}{\Leftrightarrow} & \frac{\sin(a)}{\cancel{\sin(\alpha)}} \cdot \frac{\cancel{\sin(\alpha)}}{\sin(c)} = \cancel{\sin(c)} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cancel{\sin(c)}} \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin(a)}{\sin(c)} = \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{22.4}$$

Wir ziehen nun eine Zwischenbilanz!

(22.1) Hier sind drei Seiten beteiligt.

(22.2) Hier sind eine Kathete und zwei Winkel beteiligt.

(22.3) Hier sind eine Hypotenuse und zwei Winkel beteiligt.

(22.4) Hier sind die Hypotenuse, die Gegenkathete und ein Winkel beteiligt.

Zwei Fälle fehlen uns noch! Zum einen muss noch der Fall "Ein Winkel, die Ankathete und die Hypotenuse" und zum anderen muss noch der Fall "Ein Winkel und die zwei Katheten" untersucht werden!
Wir fahren nun mit dem Fall **"Ein Winkel, die Ankathete und die Hypotenuse"** fort:
Wir kennen die Größen α, β und c eines rechtwinkligen Kugeldreiecks. Wir betrachten nun $\cos(\alpha)$ und verwenden nacheinander die Neper'schen Formeln (22.2), (22.4) und (22.1).

$$\cos(\alpha) \overset{(22.2)}{=} \sin(\beta) \cdot \cos(a)$$

Nun verwenden wir die Gleichung (22.4). Dabei ersetzen wir $\sin(\beta)$ mit dem Quotienten $\frac{\sin(b)}{\sin(c)}$.

$$\sin(\beta) \cdot \cos(a) \overset{(22.4)}{=} \frac{\sin(b)}{\sin(c)} \cdot \cos(a)$$

Im nächsten Schritt benützen wir (22.1). Dabei formen wir die Gleichung (22.1) um, indem wir beide Seiten davon durch $\cos(b)$ teilen. Auch dieser Rechenschritt ist wieder

erlaubt, da $\cos(b)$ nicht 0 sein kann. Wir ersetzen also nun $\cos(a)$ mit dem Quotienten $\frac{\cos(c)}{\cos(b)}$.

$$\frac{\sin(b)}{\sin(c)} \cdot \cos(a) \overset{(22.1)}{=} \frac{\sin(b)}{\sin(c)} \cdot \frac{\cos(c)}{\cos(b)}$$

Nun ordnen wir die Quotienten neu an.

$$\frac{\sin(b)}{\sin(c)} \cdot \frac{\cos(c)}{\cos(b)} = \frac{\sin(b) \cdot \cos(c)}{\sin(c) \cdot \cos(b)} = \frac{\sin(b) \cdot \cos(c)}{\cos(b) \cdot \sin(c)} = \frac{\sin(b)}{\cos(b)} \cdot \frac{\cos(c)}{\sin(c)}$$

Im nächsten Schritt bilden wir den Kehrwert des Quotienten $\frac{\cos(c)}{\sin(c)}$. Es gilt nämlich $\frac{\cos(c)}{\sin(c)} = \left(\frac{\sin(c)}{\cos(c)}\right)^{-1}$. Anschließend können wir zweimal die Definition des Tangens verwenden und schreiben das Inverse von $\tan(c)$ als Quotienten.

$$\frac{\sin(b)}{\cos(b)} \cdot \frac{\cos(c)}{\sin(c)} = \underbrace{\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}_{=\tan(b)} \cdot \left(\underbrace{\frac{\sin(c)}{\cos(c)}}_{=\tan(c)} \right)^{-1} = \tan(b) \cdot \underbrace{(\tan(c))^{-1}}_{=\frac{1}{\tan(c)}} = \frac{\tan(b)}{\tan(c)}$$

Es folgt also daraus:

$$\cos(\alpha) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)} \tag{22.5}$$

Zum Schluss betrachten wir nun den Fall **"Ein Winkel und die zwei Katheten"**. Dazu nehmen wir nun an, dass die Größen α, a und b bekannt sind. Aufgrund des Sinussatzes gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} \overset{\text{Sinussatz}}{=} \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)}$$

Aufgrund der Formel (22.2) gilt die Gleichung "$\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(a)}$". Dabei wurde die ursprüngliche Gleichung (22.2) umgeformt, indem beide Seiten durch das Bild $\cos(a)$ geteilt wurden. Aufgrund der zugrundeliegenden Bedingungen, die wir an das rechteckige Kugeldreieck gestellt haben, ist keine Seite des Dreiecks gleich $\frac{\pi}{2}$. Daher kann das Bild einer Seite bezüglich des Kosinus nicht 0 werden. Eine Division durch $\cos(a)$ ist daher erlaubt.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} &= \sin(\beta) \cdot \frac{1}{\sin(b)} \\ \overset{(22.2)}{\Leftrightarrow} \frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} &= \frac{\cos(\alpha)}{\cos(a)} \cdot \frac{1}{\sin(b)} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit dem Quotienten $\frac{\sin(a)}{\cos(\alpha)}$. Anschließend können wir nach zwei Kürzungen, zweimal die Definition der

Tangensfunktion benützen. Schlussendlich resultiert dann die Neper'sche Formel (22.6).

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} &= \frac{\cos(\alpha)}{\cos(a)} \cdot \frac{1}{\sin(b)} \\
\overset{\cdot\frac{\sin(a)}{\cos(\alpha)}}{\Leftrightarrow} \frac{\sin(\alpha)}{\cancel{\sin(a)}} \cdot \frac{\cancel{\sin(a)}}{\cos(\alpha)} &= \frac{\cancel{\cos(\alpha)}}{\cos(a)} \cdot \frac{1}{\sin(b)} \cdot \frac{\sin(a)}{\cancel{\cos(\alpha)}} \\
\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}_{=\tan(\alpha)} &= \underbrace{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}}_{=\tan(a)} \cdot \frac{1}{\sin(b)} \\
\tan(\alpha) &= \frac{\tan(a)}{\sin(b)} \qquad (22.6)
\end{aligned}$$

Somit konnten wir uns nun die sechs Neper'schen Formeln erfolgreich herleiten. Abschließen möchte ich dieses Kapitel mit einer Zusammenfassung der oben hergeleiteten Formeln.

1. Ein Winkel, die Gegenkathete und die Hypotenuse sind im Rechengeschehen involviert. Mit zwei der drei genannten Größen, kann man mithilfe der folgenden Formel die fehlende dritte Größe berechnen.

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)} \qquad \text{(Wi GK Hyp)}$$

2. Ein Winkel, die Ankathete und die Hypotenuse sind involviert.

$$\cos(\alpha) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)} \qquad \text{(Wi AK Hyp)}$$

3. Zwei Winkel und zwei Katheten sind involviert.

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(a)}{\sin(b)} \qquad \text{(Wi 2K)}$$

4. Alle Drei Seiten sind involviert.

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) \qquad \text{(3 S)}$$

5. Zwei Winkel und die Hypotenuse sind involviert.

$$\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \cos(c) = 1 \qquad \text{(2Wi Hyp)}$$

6. Zwei Winkel und eine Kathete sind involviert.

$$\cos(\alpha) = \sin(\beta) \cdot \cos(a) \qquad \text{(2Wi K)}$$

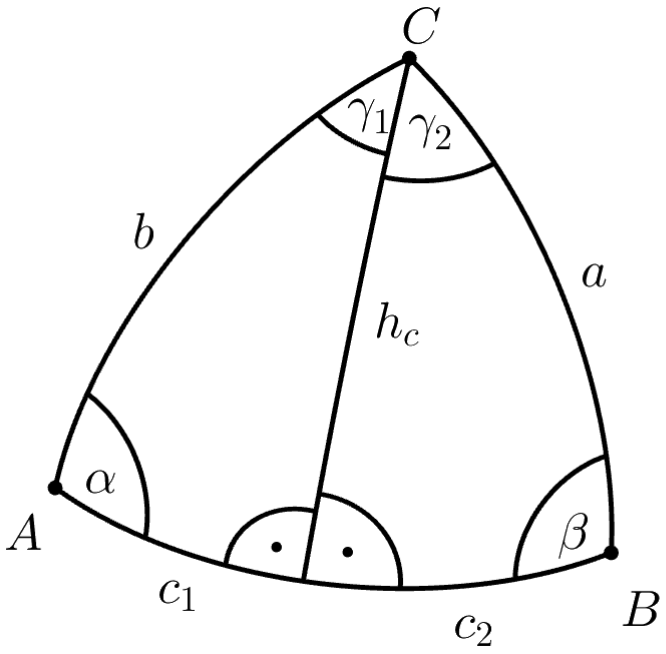


Abbildung 30: Lösungsskizze zu "SSWW" mit spitzem Winkel β

Man kann mit diesen sechs Formeln die fehlenden Größen eines rechtwinkligen Kugeldreiecks berechnen, wenn man neben dem einen rechten Winkel γ noch zwei weitere Größen kennt.

Damit können wir nun auch die beiden fehlenden allgemeinen Fälle "SWW" und "SSW" lösen. Wie schon erwähnt kann man sich bei beiden Fällen eine weitere Größe mit dem Sinussatz berechnen. Im Fall "SSW" erhält man einen weiteren Winkel. Beim Fall "SWW" eine weitere Seite. Wir betrachten nun den Fall "SSW". Wir nehmen nun an, dass wir uns mithilfe des Sinussatzes den Winkel β berechnet haben. Wie wir schon wissen, fehlt es diesem Winkel an Eindeutigkeit. Es gibt ein spitzes β als auch ein stumpfes β. Für die weiteren Berechnungen müssen wir die beiden Winkel separat betrachten. Zuerst wählen wir das spitze β. Zusammenfassend fehlen uns nun eine Seite und der dazu gegenüberliegende Winkel. Wir nehmen an, dass es sich dabei um c und γ handelt. Und nun kommt eine Neper'sche Formel ins Spiel!
Angenommen die Größen $a, b, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}$mit $b < \frac{\pi}{2}$ sind bekannt. So kann man sich die restlichen Größen c und γ nun so berechnen, indem man sich die Höhe h_c von der Seite c zum Eckpunkt C vorstellt. Diese Höhe unterteilt nun das ursprüngliche Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Die Skizze 30 auf Seite 107 visualisiert die gerade beschriebene Idee. Wir betrachten nun das linke rechtwinklige Dreieck. Wir kennen neben den rechten Winkel, die Seite b sowie den Winkel α. Für das linke rechtwinklige Kugeldreieck stellt b die Hypotenuse dar. Es liegt demnach der Fall (2Wi Hyp) vor. Daher können wir den

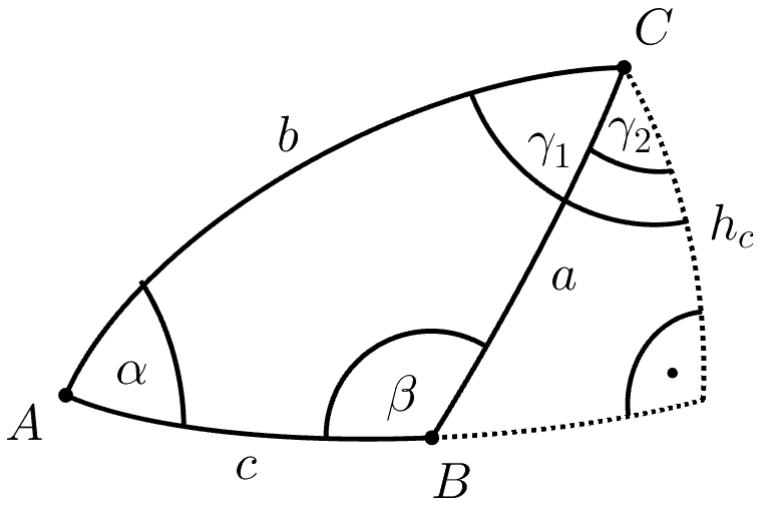


Abbildung 31: Lösungsskizze zu "SSWW" mit stumpfen Winkel β

Winkel γ_1 mithilfe der fünften Neper'schen Formel berechnen.

$$\begin{aligned}
&\tan(\alpha)\cdot\tan(\gamma_1)\cdot\cos(b) = 1 \\
&\overset{\tan(\alpha)\cdot\cos(b)\neq 0}{\Leftrightarrow} \tan(\gamma_1) = \frac{1}{\tan(\alpha)\cdot\cos(b)} \\
&\Leftrightarrow \gamma_1 = \arctan\left(\frac{1}{\tan(\alpha)\cdot\cos(b)}\right)
\end{aligned}$$

Analog können wir auch den Winkel γ_2 aus dem rechten rechtwinkligen Kugeldreieck berechnen.

$$\begin{aligned}
&\tan(\beta)\cdot\tan(\gamma_2)\cdot\cos(a) = 1 \\
&\overset{\tan(\beta)\cdot\cos(a)\neq 0}{\Leftrightarrow} \tan(\gamma_2) = \frac{1}{\tan(\beta)\cdot\cos(a)} \\
&\Leftrightarrow \gamma_2 = \arctan\left(\frac{1}{\tan(\beta)\cdot\cos(a)}\right)
\end{aligned}$$

Damit können wir nun den Winkel des ursprünglichen Dreiecks $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ bestimmen. Mithilfe des Seitenkosinussatzes könnte man dann anschließend noch die Seite c des Dreiecks erschließen.

Sollte man den stumpfen Winkel für β wählen, so muss man nur eine Kleinigkeit an der gerade beschriebenen Vorgehensweise ändern. Die Winkel γ_1, sowie γ_2 lassen sich komplett gleich berechnen. Jedoch gilt im Falle eines stumpfen β nun $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$. Das kommt daher weil sich die Höhe h_c nun außerhalb des Dreiecks befindet. Abbildung 31 auf Seite 108 soll diese Behauptung plausibilisieren. Sollte man beim Fall "SWW" die fehlende Seite mithilfe des Sinussatzes berechnen, so muss man auch mit einer spitzen

und stumpfen Seite rechnen und die beiden Fälle separieren. Der Lösungsweg verlauft dann analog zum Lösungsweg von "SSW".

24. Spezialfälle

In diesem Kapitel möchte ich einige Spezialfälle von Kugeldreiecken thematisieren. Das ist meines Erachtens deshalb notwendig, da manche dieser Spezialfälle eine eigene Vorgehensweise bei ihrer Berechnung benötigen. Andererseits gibt es einen Spezialfall, welcher unter gewissen Umständen gar nicht lösbar ist.

Auch in der sphärischen Geometrie existieren sogenannte gleichschenklige oder gleichseitige Dreiecke. Diese könnte man natürlich auch als Spezialfälle klassifizieren. Allerdings schenken wir diesen keine besondere Aufmerksamkeit, da sie bei ihrer Berechnung keinerlei Probleme machen. Ihre Berechnungen verlaufen komplett analog zu einem allgemeinen Dreieck.

Als durchaus problematisch können sich rechtwinklige als auch rechtseitige Kugeldreiecke herausstellen. Diese können in der sphärischen Geometrie nämlich mehr als nur eine rechte Seite oder einen rechten Winkel besitzen. Das heißt, dass mindestens eine der Größen des Dreiecks gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Bei der Berechnung von Dreiecken gilt die Winkelfunktion Sinus beziehungsweise Kosinus als unerlässlich. Diese nehmen an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ den Wert 1 beziehungsweise den Wert 0 an. Das kann manchmal zu Problemen führen. Zum Beispiel verwendet man beim Fall "SSWW" die 5. Neper Formel. In dieser Formel kommt ein Tangens vor, der an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ jedoch nicht definiert ist. Daher könnte man unter gewissen Umständen die 5. Neper Formel nicht anwenden und könnte folglich das Problem "SSWW" nicht lösen.

24.1. Rechtwinkliges Dreieck

Wie schon erwähnt gehen wir bei einem rechtwinkligen Kugeldreieck davon aus, dass es nur einen rechten Winkel besitzt. Wie wir im Kapitel 23 "Rechtwinkliges Kugeldreieck" auf Seite 102 gesehen haben, lässt sich ein rechtwinkliges Dreieck mithilfe der Neper'schen Formeln leicht berechnen.

24.2. Rechtseitiges Dreieck

Wenn man davon ausgeht, dass ein rechtseitiges Dreieck nur eine rechte Seite hat, so ist auch dessen Berechnung einfach durchzuführen. Es gibt noch einen Trick, welcher die Bestimmung der fehlenden Größen des rechtseitigen Dreiecks noch weiter erleichtert. Man benützt die Beziehungen

$$a' = \pi - \alpha \qquad \alpha' = \pi - a$$
$$b' = \pi - \beta \qquad \beta' = \pi - b$$
$$c' = \pi - \gamma \qquad \gamma' = \pi - c$$

. Damit kann man nämlich die gegebenen Größen des rechtseitigen Dreiecks in Größen des dazugehörigen Polardreiecks umrechnen. Beim Polardreieck eines rechtseitigen Dreiecks handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck, welches man mithilfe der Neper'schen Formeln berechnen kann. Die erhaltenen Größen kann man mit den oben angeführten Beziehungen wieder umrechnen.

24.3. Doppelrechtwinkliges - gleichschenkliges Kugeldreieck

Natürlich kann es auch sphärische Dreiecke geben, welche zwei rechte Winkel besitzen. Diese doppelrechtwinkligen Dreiecke sind immer auch gleichschenklige Dreiecke. Die Schenkel betragen immer $\frac{\pi}{2}$. Diese Behauptung können wir leicht in einen Satz gießen und mithilfe des Winkelkosinussatzes und des Sinussatzes beweisen.

Satz 11. *Es sei (A,B,C) ein sphärisches Dreieck. Falls dieses Dreieck zwei rechte Winkel besitzt, so folgt daraus, dass es auch gleichschenklig ist. Die Länge der Schenkel betragen dann* $\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Annahme können wir $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ annehmen.
Aus dem Winkelkosinussatz folgt:

$$\begin{aligned}
&\cos(\beta) = \cos(b)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\gamma) - \cos(\alpha)\cdot\cos(\gamma)\\
\overset{\alpha,\beta=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\ &\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} = \cos(b)\cdot\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{=1}\cdot\sin(\gamma) - \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0}\cdot\cos(\gamma)\\
&\Leftrightarrow 0 = \cos(b)\cdot 1\cdot\sin(\gamma) - 0\cdot\cos(\gamma)\\
&\Leftrightarrow 0 = \cos(b)\cdot\sin(\gamma)
\end{aligned}$$

Das Produkt $\cos(b)\cdot\sin(\gamma)$ wird genau dann 0, falls $\cos(b)$ und/oder $\sin(\gamma)$ gleich 0 sind. Nun muss man dringend beachten, dass sich die Größen b, γ beide im offenen Intervall $(0, \pi)$ befinden. Keine Zahl aus diesem Intervall wird bezüglich des Sinus auf die 0 abgebildet. Das heißt, dass $\sin(\gamma) \neq 0$ gilt. Daher muss $\cos(b)$ gleich 0 sein.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 0 = \cos(b)\cdot\sin(\gamma)\\
&\Leftrightarrow (\cos(b) = 0) \vee \underbrace{(\sin(\gamma) = 0)}_{\text{kann nicht sein!}}
\end{aligned}$$

Wie schon erwähnt befindet sich die Seite b im Intervall $(0, \pi)$. Auf diesem Intervall, nimmt die Kosinusfunktion nur Werte aus dem Intervall $(-1, 1)$ an. Daher können wir das Bild von $\cos(b)$ bezüglich der Arkuskosinusfunktion bilden.

$$\begin{aligned}
&\cos(b) = 0\\
\overset{b\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}\ &\arccos(\cos(b)) = \arccos(0)
\end{aligned}$$

Da die Arkuskosinusfunktion die Umkehrfunktion des auf $(0, \pi)$ eingeschränkten Kosinus ist, gilt $\arccos(\cos(b)) = b$. Nun müssen wir noch herausfinden, welchen Wert die Arkuskosinusfunktion bezüglich 0 annimmt. Dazu überlegen wir uns, welche Zahl aus dem

Intervall $(0, \pi)$ bezüglich des Kosinus auf die 0 abgebildet wird. Wenn man sich die Abbildung 1 auf Seite 11 ansieht, so lässt man sich leicht von der Aussage "$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$" überzeugen. Es gilt also

$$\begin{aligned} &\arccos(\cos(b)) = \arccos(0) \\ \Leftrightarrow\ & b = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Somit konnten wir schon eine fehlende Seite unseres Dreiecks, nämlich $b = \frac{\pi}{2}$ berechnen. Jetzt müssen wir nur noch $a = \frac{\pi}{2}$ nachweisen.
Dazu betrachten wir die erste Gleichung des Sinussatzes und setzen alle bekannten Größen ein.

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\sin(a)}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \\ &\frac{\sin(a)}{1} = \frac{1}{1} \\ \Leftrightarrow\ &\sin(a) = 1 \end{aligned}$$

Es wird nur die Zahl $\frac{\pi}{2}$ aus dem offenen Intervall $(0, \pi)$ bezüglich der Sinusfunktion auf die 1 abgebildet. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\sin(a) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & a = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

Und damit konnten wir nachweisen, dass ein doppelrechtwinkliges Kugeldreieck automatisch ein gleichschenkliges Kugeldreieck ist. Dabei haben die Schenkel die Länge $\frac{\pi}{2}$.

Weiters gilt für ein doppelrechtwinkliges Dreieck, dass der Winkel zwischen den Schenkeln gleich seiner gegenüberliegenden Seite ist. Es sei ein sphärisches Dreieck mit $a, b, \alpha, \beta = \frac{\pi}{2}$ gegeben. Dann ist c gleich γ.
Das können wir mithilfe des Winkelkosinussatzes nachweisen. Wir betrachten die dritte Gleichung dieses Satzes und setzen alle bekannten Größen ein.

$$\begin{aligned} &\cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \overset{\alpha,\beta=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\ &\cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \\ \Leftrightarrow\ &\cos(\gamma) = \cos(c) - 0 \\ \Leftrightarrow\ &\cos(\gamma) = \cos(c) \end{aligned}$$

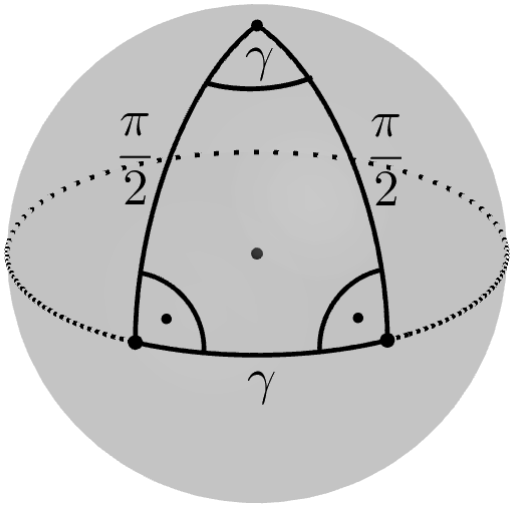


Abbildung 32: Ein doppelrechtwinkliges Dreieck

Da sich γ und c beide im offenen Intervall $(0, \pi)$ befinden, können wir beide Seiten der letzten Gleichung bezüglich der Arkuskosinusfunktion auswerten.

$$\begin{aligned} & \cos(\gamma) = \cos(c) \\ \overset{\gamma,c\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} & \arccos(\cos(\gamma)) = \arccos(\cos(c)) \\ \Leftrightarrow & \gamma = c \end{aligned}$$

Wie man sieht, besitzt ein doppelrechtseitiges Dreieck einige Eigenschaften. Die Abbildung 32 auf Seite 112 zeigt ein solches Dreieck, wenn man $a, b, \alpha, \beta = \frac{\pi}{2}$ annimmt. Egal wie groß man γ wählt, die Schenkel sowie die rechten Winkel verändern niemals ihre Größe. Man kann also sagen, dass das Dreieck durch γ eindeutig bestimmt ist. Und hier kommen wir zum größten Problem dieses Dreiecks! Der Fall "SSWW" ist nicht lösbar, falls γ unbekannt ist. Weiters gelingt es auch nicht die fehlenden Größen mithilfe der 5. Neper Formel zu berechnen, da der darin vorkommende Tangens aufgrund der Schenkel, mit der Größe $\frac{\pi}{2}$, nicht definiert ist.

Ich ziehe daher den Schluss, dass der Fall "SSWW" bei einem doppelrechtwinkligen Kugeldreieck nicht lösen kann, falls der Winkel zwischen den Schenkeln unbekannt ist.

24.4. Kugeloktant

Ein Spezialfall des doppelrechtwinkligen Kugeldreiecks heißt Kugeloktant. Man stelle sich vor, dass der Winkel γ des Dreiecks in Abbildung 32 auf Seite 112 auch gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Somit erhält man ein sphärisches Dreieck, dessen Größen alle $\frac{\pi}{2}$ betragen. Dieses Dreieck nennt man Kugeloktant. Das Wort "Oktant" kommt von der Zahl Acht und findet Verwendung, da acht Kugeloktanten die gesamte Kugel abdecken. Dazu betrachte man die Abbildung 33 auf Seite 113.

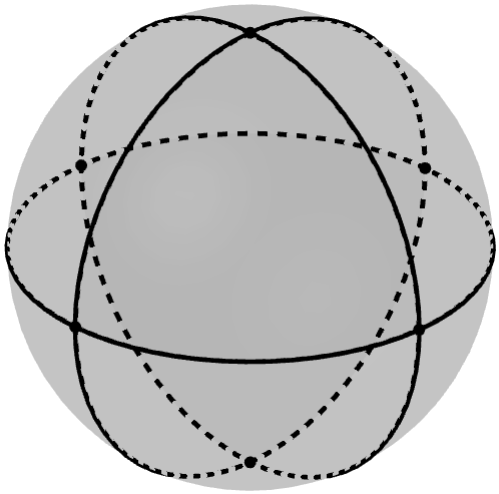


Abbildung 33: Acht Kugeloktanten

25. Zusammenfassung

In diesem Kapitel sollen nochmal alle Probleme mit einem derer Lösungswege aufgelistet werden.

SWS In diesem Fall liefert der **Seitenkosinussatz** die letzte fehlende Seite. Da man nun alle drei Seiten kennt, kann man nach einer kurzen Umformung der Gleichungen des Seitenkosinussatzes die beiden restlichen Winkel berechnen.

SSS Wenn man alle drei Gleichungen des **Seitenkosinussatzes** geschickt umformt, erhält man die restlichen drei Winkel.

WSW Nach Anwendung des **Winkelkosinussatzes** erhält man den letzten fehlenden Winkel. Indem man zwei der drei Gleichungen des Winkelkosinussatzes umformt, erhält man die zwei restlichen Seiten.

WWW Wenn man alle drei Gleichungen des **Winkelkosinussatzes** geschickt umformt, erhält man die restlichen drei Seiten.

SWW Mithilfe des **Sinussatzes** lässt sich jene Seite berechnen, welche einem der gegebenen Winkel gegenüber liegt. Beachte, dass die erhaltene Seite nicht eindeutig ist. Unabhängig von der Wahl der spitzen oder stumpfen Seite gelangt man automatisch zum Fall "SSWW"

SSW Auch hier liefert der **Sinussatz** einen Winkel, der einer der gegebenen Seiten gegenüberliegt. Auch dieser Winkel ist nicht eindeutig. Nichtsdestotrotz gelangt man anschließend zum Fall "SSWW".

SSWW Diesen Fall kann man nur dann lösen, falls die bekannten Größen ungleich $\frac{\pi}{2}$ sind, da die Neper'schen Formeln sonst nicht einsetzbar sind. Man teilt das Dreieck mittels jener Höhe, welche den gesuchten Winkel aufspaltet. Mithilfe der **5. Neper Formel** berechnet man sich die beiden Teile des gesuchten Winkels. Falls einer der beiden gegebenen Winkel stumpf ist, so müssen die erhaltenen Teile subtrahiert werden. Ansonsten führt eine Addition zum Erhalt des dritten Winkels. Für die Berechnung der letzten übrigen Größe existieren mehrere Möglichkeiten. Beispielsweise wäre der Seitenkosinussatz eine Option.

Achtung!: Der Fall "SSWW" ist bei einem doppelrechtseitigen Kugeldreieck nicht immer lösbar!

In der Literatur wird dieses Problem manchmal umgangen, indem das doppelrechtseitige Kugeldreieck ausgeschlossen wird. So gibt Laska die folgende Einteilung für Kugeldreiecke an:

> "Wie werden sie sphärischen Dreiecke eingeteilt? **Antwort**. Die sphärischen Dreiecke werden eingeteilt:
>
> A. In rechtwinklige Dreiecke, bei welchen der eine Winkel gleich 90° ist;
>
> B. In rechtseitige oder Quadrantendreiecke, deren eine Seite 90° beträgt;
>
> C. In schiefwinklige Dreiecke, welche nicht rechtseitig sind." [Las90, S. 4]

Das doppelrechtseitige Kugeldreieck lässt sich keiner der drei genannten Kategorien A,B und C zuordnen. Somit wird es ausgenommen ohne konkret benannt worden zu sein. Dieser Umgang ist meines Erachtens der ungünstigste, da der Leser bezüglich des Problems im Dunkeln gelassen wird.

Andere Mathematiker [Ham07, S. 421] bezeichnen das doppelrechtseitige Kugeldreieck als einen Spezialfall, erwähnen jedoch keine etwaigen Probleme, die bei ihrer Berechnung auftreten könnten.

Crantz interpretiert das doppelreichtseitige Kugeldreieck als halbes Zweieck und legitimiert so einen Ausschluss.

> "Der Leser denke an das Kugeldreieck, das zwei Rechte und im Falle $\alpha = 90°$ (Kugeloktant) sogar drei Rechte aufweist. Dann liegen eben Sonderfälle vor, nämlich halbe Zweiecke, die als solche leicht zu beurteilen sind. Wir werden also das rechtwinklige Kugeldreieck stets als nur einen rechten Winkel enthaltend betrachten dürfen." [Cra42, S. 70 - 71]

Durch die Entscheidung, das doppelrechtseitige Kugeldreieck im Vorhinein auszuschließen, entzieht man sich einer Auseinandersetzung mit der Problematik des Falles "SSWW". Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, "schönere" Schlüsse zu ziehen. Zum Beispiel würde sich dann behaupten lassen, dass man wie in der ebenen Trigonometrie nur drei Größen

zur Berechnung der Kugeldreiecke benötigt. Dennoch habe ich mich von dieser Herangehensweise distanziert, da man meines Erachtens darüber Bescheid wissen sollte, wenn man sich mit der sphärischen Trigonometrie beschäftigt.

In diesem Absatz möchte ich den dritten großen Teil dieser Arbeit zusammenfassen und somit auch beenden.
Grundlegend können wir mithilfe der drei zentralen Sätze und den daraus resultierenden Formeln, bei mindestens drei gegebenen Größen, die restlichen Größen des sphärischen Dreiecks berechnen. Abgesehen von einem Spezialfall funktioniert das immer.

Teil IV.
Schulbezug

In diesem letzten Teil möchte ich nun ein Konzept vorstellen, in welchem Schüler und Schülerinnen Inhalte aus der sphärischen Geometrie kennenlernen und auch anwenden. Konkret sollen die Schüler und Schülerinnen nach den Unterrichtseinheiten in der Lage sein, Entfernungen zwischen zwei beliebigen Orten auf der Erde berechnen zu können. Das ist das zentrale Lernziel.

Dieses Lernziel soll innerhalb von drei Unterrichtsstunden erreicht werden. Im Unterkapitel 28 "Unterrichtskonzept" auf Seite 119 sollen die drei Unterrichtsstunden im Detail vorgestellt werden. Die dritte Unterrichtsstunde soll so konzipiert werden, sodass die IBL-Methode nach Menezes [Men+13] umsetzbar ist. Diese pädagogische Methode soll im Unterkapitel 26 auf Seite 116 umfassend erklärt werden. Weiters möchte ich im Kapitel 27 "Lehrplan" auf Seite 117 erläutern, inwiefern das Unterrichtsthema, sowie die IBL-Methodik im österreichischen Lehrplan verankert und dadurch legitim sind.

26. IBL

Wie schon erwähnt, möchte ich die dritte Stunde meines Unterrichtskonzeptes so planen, sodass ein, auf eigene Nachforschung basiertes, Lernen möglich ist. Das dabei verwendete pädagogische Konzept nennt sich inquiry based learning (IBL) und wird vermehrt im englischsprachigen Raum praktiziert. Der zugrundeliegende Gedanke von IBL lässt sich gut mit einem Zitat von Konfuzius zusammenfassen.

> *"Was du mir sagst, das vergesse ich. Was du mir zeigst, daran erinnere ich mich. Was du mich tun lässt, das verstehe ich."*

Es geht also darum, die Schüler und Schülerinnen selbst forschen zu lassen. Man kann also auch von einem anwendungsorientierten Unterricht sprechen. Dabei gilt es zu beachten, dass die Schüler und Schülerinnen die Inhalte selbst erarbeiten und nicht von der Lehrperson präsentiert bekommen. Menezes legt sein Hauptaugenmerkmal auf diesen Aspekt und stellt in seinem Artikel [Men+13] ein Konzept vor, mit welchem sich eben dieser Gesichtspunkt optimal erfüllen lässt.
Folglich soll deshalb die Kernaussage des erwähnten Artikels genannt und die entscheidenden Punkte aufgelistet werden.

Zusammengefasst geht es im erwähnten Text um die Eignung von verschiedenen Fragetypen in unterschiedlichen Phasen in einem anwendungsorientierten Unterricht. Dabei handelt es sich ausschließlich um Fragen, welche von der Lehrperson gestellt werden. Menezes klassifiziert diese in **verification questions**, **focusing questions** und in **inquiry questions**.

Das Stellen von verification questions dient dem reinen Abprüfen von Wissen. Durch focusing questions, kann es der Lehrperson gelingen, die Aufmerksamkeit der Schüler und Schülerinnen in eine bestimmte inhaltliche Richtung zu lenken. Die Intention vom Stellen von inquiry questions ist es, die Strategie, sowie die Denkweise von Schüler und Schülerinnen zu erfahren.

Die im Text aufgelisteten Phasen eines anwendungsorientierten Unterrichts heißen **Einführungsphase**, **Entwicklungsphase**, **Diskussionsphase** und **Systematisierungsphase**.
In der ersten Phase soll die Aufgabe vorgestellt und verstanden werden. Dazu kann sich die Lehrperson durch verification questions vergewissern, dass die SuS die Angabe/Aufgabe verstanden haben.
In der Entwicklungsphase sollen die Schüler und Schülerinnen in Kleingruppen gemeinsam an der Aufgabe tüfteln. Dabei ist es von Vorteil, wenn die Schüler und Schülerinnen die Aufgabe möglichst „laut“ bearbeiten, sodass die Lehrperson leichter Fehler oder suboptimale Lösungsstrategien auffallen. Durch die Verwendung von focusing questions kann die Lehrperson die Lerngruppe dann anschließend wieder in die „richtige“ Richtung lenken. Sollte die Denkweise der SuS in dieser Phase nicht gleich ersichtlich sein, so können inquiry questions dem Lehrer direkt weiterhelfen.
In der Diskussionsphase sollten die Ergebnisse und vor allem die Lösungsansätze und Strategien von den Lerngruppen der restlichen Klasse präsentiert und verglichen werden. Hier können wiederum focusing questions verwendet werden, um die Schüler und Schülerinnen während der Präsentation auf etwaige Fehler aufmerksam zu machen. Bei einer Präsentation, welche den Lösungsansatz unbefriedigend erläutert, kann die Lehrperson durch das Stellen von inquiry questions genauer nachhaken.
Schlussendlich werden in der Systematisierungsphase die konkreten Lösungsansätze in eine mathematisch korrekte Sprache niedergeschrieben und somit in die abstrakte Ebene gehoben. Auch hier können Fehler passieren, welche von den Schüler und Schülerinnen bestmöglich selbst ausgemerzt werden, indem die Lehrperson durch eine focusing question die SuS darauf aufmerksam gemacht hat. Abschließend kann die Lehrperson für sich selbst durch verification questions herausfinden, ob und was die SuS gelernt haben.

27. Lehrplanbezug

27.1. Inhalt

Nach dem österreichischen Lehrplan [Bil17] sollte man in einer allgemein höher bildende Schule in der 6. Klasse das Thema "Trigonometrie" umfassend behandeln. Der unten angeführte Absatz wurde wörtlich aus dem Lehrplan genommen.

> *"Trigonometrie: Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus- und Kosinussatz)"* [Bil17, S. 4]

Dabei wird allgemein der Begriff "Trigonometrie" erwähnt. Von einer näheren Differen-

zierung in die Teilgebiete, "ebene Trigonometrie", "hyperbolische Trigonometrie" und "sphärische Trigonometrie" wird Abstand gehalten. Daher ist es meines Erachtens durchaus legitim, Inhalte der sphärischen Trigonometrie im Schulunterricht zu behandeln.
Die Menschen lernten in der Frühneuzeit die sphärische Trigonometrie als hilfreiches Werkzeug der Seefahrt einzusetzen. Viele nützliche Inhalte wie die Neper'schen Formeln stammen aus dieser Zeit. Vor allem wurde sphärische Trigonometrie für Kurs - und Entfernungsberechnungen verwendet. Die Entfernungsberechnung gehört daher zu einem der wichtigsten Anwendungsbereiche der sphärischen Trigonometrie und ist daher meiner Meinung nach ein sehr dankbares Schulthema. Darum habe ich mich dafür entschieden.

27.2. Didaktische Grundsätze

Weiters lässt sich auch der Einsatz der IBL - Methodik nach Menezes mithilfe des Lehrplanes rechtfertigen. Die Prinzipien dieses pädagogischen Konzeptes stimmen nämlich auch hervorragend mit den didaktischen Grundsätzen des österreichischen Lehrplanes überein. Im Folgenden möchte ich einige dieser Grundsätze auflisten und dabei Überschneidungen mit Prinzipien der IBL - Methodik nach Menezes aufzeigen.

- Lernen in anwendungsorientierten Kontexten [Bil17, S. 2]

  Dieser didaktische Grundsatz wird durch den Einsatz der IBL - Methodik nach Menezes zu 100% erfüllt. Das Wort "inquiry", welches durch das "I" in IBL dargestellt wird, wird häufig mit "anwendungsorientiert" übersetzt. Der Inhalt der Unterrichtsstunden, "Berechnung der Entfernung zweier Orte auf der Erdkugel", setzt die sphärische Trigonometrie auch in einen glaubwürdigen anwendungsorientierten Kontext. Dadurch wird die Nützlichkeit der Mathematik im Alltag aufgezeigt.
  Zusammenfassend ist das Unterrichtsthema ein glaubwürdiger Anwendungsbereich der sphärischen Trigonometrie und dadurch für die IBL - Methode nach Menezes prädestiniert. Diese Methode erfüllt hervorragend den didaktischen Grundsatz "Lernen in anwendungsorientierten Kontexten" des österreichischen Lehrplans.

- Lernen im sozialen Umfeld [Bil17, S. 3]

  In der Entwicklungsphase der dritten Unterrichtsstunde arbeiten die Schüler und Schülerinnen in einem Team von ungefähr fünf Personen. Um die Entfernung zweier Orte berechnen zu können, muss man sich geschickt bei den Techniken der sphärischen Trigonometrie bedienen. Dieser Schritt ist für Schüler und Schülerinnen keinesfalls einfach, da Schüler und Schülerinnen das problemorientierte selbstständige Arbeiten in der Mathematik nicht gewohnt sind. Um das Ziel dennoch erreichen zu können, müssen die Teams gut zusammenarbeiten. Das beinhaltet ein strukturiertes Arbeiten und eine funktionierende Kommunikation.

- Lernen in Phasen [Bil17, S. 2]

Im österreichischen Lehrplan wird die Umsetzung des didaktischen Grundsatzes "Lernen in Phasen" unter anderem wie folgt beschrieben.

> *"Die minimale Realisierung [des Grundsatzes "Lernen in Phasen"] besteht in der Orientierung am Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und der Einführung von Begriffen über intuitive und heuristische Ansätze mit exemplarischen Exaktifizierungen, die maximale Realisierung in einer weit reichenden Präzisierung mathematischer Begriffe, Sätze und Methoden."* [Bil17, S. 2 - 3]

Mithilfe der IBL-Methode nach Menezes wird der beschriebene Grundsatz meiner Meinung nach auch ideal umgesetzt. Die Einführungsphase ist dazu gedacht, das Vorwissen der SuS zu erheben. In der Entwicklungsphase werden Ideen gesammelt und davon Vielversprechende konkretisiert. In der Systematisierungsphase werden die funktionierenden Ideen in eine mathematische Sprache gebracht und damit auch exaktifiziert.

- Lernen mit technologischer Unterstützung [Bil17, S. 3]

  Neben dem selbstverständlichen Einsatz des Taschenrechners, werden die Schüler und Schülerinnen ihre berechneten Entfernungen zwischen zwei Orten mit der Google Earth Applikation überprüfen. Damit arbeiten sie mit einer Software, die neben der Funktion einer verlässlichen Kontrolle, auch die Funktion innehat, das Gefühl der Schüler und Schülerinnen für den Globus zu sensibilisieren.

28. Unterrichtskonzept

In diesem Kapitel stelle ich nun mein Unterrichtskonzept vor. Dieses beinhaltet drei Unterrichtsstunden, welche das Ziel verfolgen, den Schüler und Schülerinnen das Berechnen von Entfernungen zweier Orte beizubringen.
Die Unterrichtsbilder werden jeweils in einer Tabellenform präsentiert. Dabei werden diese recht knapp gehalten, um die Übersicht zu gewährleisten. Anschließend werden die einzelnen Phasen noch im Detail beschrieben. Zuvor werden noch didaktische Kontextüberlegungen verschriftlicht. Dabei werden alle nötigen Voraussetzungen für die Umsetzung des Unterrichtskonzeptes angegeben.

28.1. Kontextüberlegungen

Lernziel: Die Schüler und Schülerinnen können die Entfernung von zwei beliebigen Orten berechnen.

Klasse: Die Schüler und Schülerinnen befinden sich in der 6.Klasse einer allgemein höher bildende Schule.

Vorwissen: Die Schüler und Schülerinnen kennen die Definition vom sphärischen Raum,

von Großkreisen und Großkreisbögen. Weiters wissen sie über die Definition des Winkels im sphärischen Raum, sowie über dessen Interpretation als Bogenlänge Bescheid. Aufbauend auf diesem Grundwissen kennen die Schüler und Schülerinnen die Definition von sphärischen Dreiecken und die drei zentralen Sätze der sphärischen Trigonometrie. Diese können sie einsetzen, um fehlende Größen eines Kugeldreiecks zu berechnen.

Fächerübergreifender Unterricht: Das Unterrichtsthema hat einen sehr starken Bezug zum Unterrichtsfach Geographie und Umweltkunde, wodurch ein fächerübergreifender Unterricht möglich wäre. Diese Verknüpfung wäre für den Lernerfolg der Schüler und Schülerinnen natürlich ideal, da sich die Schüler und Schülerinnen dann öfter und intensiver mit der Materie auseinandersetzen würden. Zusätzlich könnte man im Unterrichtskonzept den geographischen Input auslassen beziehungsweise minimieren, sodass er lediglich als Wiederholung fungiert. Dafür müsste man die Klasse selbst in Geographie unterrichten, oder man benötigt eine kooperative Lehrperson mit dem Unterrichtsfach Geografie. Da diese beiden Fälle nicht immer zutreffen können, werde ich das Unterrichtskonzept ohne Rücksichtnahme auf einen fächerübergreifenden Unterricht erstellen.

Grundlegende Literatur: Die mathematischen Inhalte der zweiten und dritten Unterrichtsstunde stammen aus dem Buch "Geometrie auf der Kugel" von Schuppar [Sch17, S. 35 - 44].

28.2. Erste Unterrichtsstunde

Zeit	Phase/Ziel	Inhalt	Methode	Material
0 - 5 min	**Phase 1.1**	Begrüßung und Organisatorisches		
5 min	**Phase 1.2** Schüler und Schülerinnen sind für das neue Unterrichtsthema bereit. Sie denken "Wir brauchen ein Gradnetz für unsere Erde"	Ein Einführungsgespräch, welches bei den Schüler und Schülerinnen Neugierde weckt.	Frontal	
5 min	**Phase 1.3** Die Schüler und Schülerinnen lernen geographische Koordinaten kennen und wissen über deren Sinnhaftigkeit Bescheid.	Längen - und Breitengrade, Maßeinheiten des Gradnetzes der Erde	Medien - einsatz	Youtube Video
5 min	**Phase 1.4** Die Schüler und Schülerinnen können die geographischen Koordinaten eines Ortes mithilfe des Schulatlas bestimmen und richtig angeben.	Darstellung des Gradnetzes der Erde in einem Atlas und übliche Notation der geographischen Koordinaten.	Frontal	Schulatlas: Weltkarte und USA-Karte
10 min	**Phase 1.5** Die Schüler und Schülerinnen notieren sich die geographischen Koordinaten von Innsbruck und Rio de Janeiro.	Ermittlung und Notierung der geographischen Koordinaten von Innsbruck und Rio de Janeiro	Partner - arbeit	Schulatlanten
10 min	**Phase 1.6** Die Schüler und Schülerinnen können die geographischen Koordinaten in Grad umrechnen	Umrechnung der geographische Koordinaten mittels des Beispiels New York.	Frontal	Koordinaten von New York, Tafel
10 - 15 min	**Phase 1.7** Die Schüler und Schülerinnen sollen durch eigenes Üben das Umrechnen zwischen den beiden Notationen verfestigen.	Bestimmung und Umformung der geographischen Koordinaten von Innsbruck, Rio de Janeiro, Moskau und Sydney	Partnerarbeit	Schulatlanten

Phase 1.1:
In der ersten Phase werden die Schüler und Schülerinnen wie gewohnt begrüßt und organisatorische Pflichten, wie das Überprüfen der Anwesenheitsliste, werden abgehandelt.

Phase 1.2:
Die Lehrperson beginnt ein Gespräch, indem sie einen beliebigen Schüler/ eine beliebige Schülerin fragt, wie weit Rio de Janeiro von Innsbruck entfernt liegt. Da der/die gefragte Schüler/in die Antwort wahrscheinlich nicht geben kann, fragt die Lehrperson weiter, wie man denn die Entfernung messen könnte. Dabei versucht die Lehrperson das Wissen der Schüler und Schülerinnen über die sphärische Geometrie hervorzurufen. Das gelingt, indem man verdeutlicht, dass eine so große Entfernung auf der Erde gekrümmt sein muss. Der Weg nach Rio ist demnach ein Großkreisbogen. Da die Schüler und Schülerinnen über die Definition des sphärischen Raumes und somit über den sphärischen Abstand Bescheid wissen, können sie nun von selbst auf die Idee kommen, mithilfe des sphärischen Abstandes die Entfernung zu berechnen. Die Lehrperson versucht durch das geschickte Stellen von Fragen, die Schüler und Schülerinnen auf diese Spur zu führen. Um eine Entfernung auf der Erde mithilfe des sphärischen Abstandes berechnen zu können, müsste man jedoch die Koordinaten der Orte wissen, und ein Koordinatensystem erstellen, mit dem Erdmittelpunkt als Nullpunkt. Nach dieser Erkenntnis erwähnt die Lehrperson, dass man so ein Koordinatensystem nicht benötigt und es einen einfacheren Weg gibt, die Entfernung berechnen zu können.
Natürlich ist es immer schwierig ein Gespräch im vornherein genau zu planen, da man die Wortmeldungen der Schüler und Schülerinnen nicht vorhersehen kann. Es ist meiner Meinung jedoch nicht schlimm, wenn das Gespräch nicht in die gewünschte Richtung verläuft. Man sollte das Gespräch einfach laufen lassen. Wichtig ist in dieser Phase, dass eine lockere Stimmung im Klassenzimmer herrscht, sodass sich die Schüler und Schülerinnen auf das neue Thema einlassen. Im Falle einer gestressten Atmosphäre im Klassenzimmer verlieren die Schüler und Schülerinnen schnell die Motivation und das Interesse. Sollte das Ziel, dass sich die Schüler und Schülerinnen nach einem Gradnetz sehnen, nicht durch das Gespräch erreichen lassen, so kann man nach ungefähr 10 Minuten das Ziel selbst erläutern.

Phase 1.3:
Die Lehrperson verwendet den Beamer des Klassenzimmers um den Schüler und Schülerinnen das Youtube Video "https://www.youtube.com/watch?v=lAGfp5UpGT0" vorzuspielen. Darin wird in ungefähr 5 Minuten das Gradnetz der Erde erklärt. Die Erklärung beinhaltet eine kurze historische Einführung, die Wichtigkeit des Gradnetzes, dessen Aufbau in Längen - und Breitengrade, sowie die Benützung und Angabe von geographischen Koordinaten.

Phase 1.4:
Die Lehrperson erklärt den Schüler und Schülerinnen nun, dass man mithilfe der geographischen Koordinaten die Entfernung zwischen Innsbruck und Rio de Janeiro berechnen kann. Dazu müssen die Schüler und Schülerinnen diese aber bestimmen können. Die

Lehrperson zeigt daher den Schülern und Schülerinnen anhand eines Schulatlanten, wie man die geographischen Koordinaten von New York bestimmt. Dazu bestimmt die Lehrperson, dass der Schnittpunkt des Breitengrades 40°43′ N mit dem Längengrad 74° W der Standpunkt New Yorks ist. Die Koordinaten von New York sind demnach 40°43′ N , 74° W.

Phase 1.5:
Die Lehrperson gibt den Schülern und Schülerinnen die Anweisung, die geographischen Koordinaten von Innsbruck und Rio de Janeiro mit dem jeweiligen Sitznachbarn zu ermitteln und zu notieren. Höchstwahrscheinlich sind 10 Minuten für diese Phase zu großzügig berechnet. Nachdem man sich vergewissert hat, dass alle Schüler und Schülerinnen die Koordinaten bestimmt haben, kann man Stichproben nehmen, indem man manche Schüler und Schülerinnen auffordert ihre Ergebnisse zu nennen. Wichtig ist, dass sich alle am Ende der Phase die selben Koordinaten notiert haben. Sollte man mehrere unterschiedliche Koordinaten erhalten haben, so einigt man sich einfach spontan auf ein Ergebnis, dass dann alle anderen übernehmen.

Phase 1.6:
Die Schüler und Schülerinnen können geographische Koordinaten bestimmen und in Grad, Minuten und Sekunden angeben. Die Lehrperson demonstriert den Schülern und Schülerinnen mittels des Beispiels von New York, wie man die geographischen Koordinaten von gemischten Einheiten in reine Grad umrechnet. Dabei gibt die Lehrperson, aus Übungszwecken, zum Breitengrad von New York noch Sekunden hinzu. Die Lehrperson schreibt nun 40°43′25″N an die Tafel. Im ersten Schritt rechnet die Lehrperson mit dem Taschenrechner die 25″ in Minuten um. Dafür teilt man 25 durch 60. $\frac{25}{60} = 0,41666667$. Nun addiert die Lehrperson das, auf vier Nachstellen gerundete, Ergebnis zu den gegebenen Minuten und erhält dadurch $43,4167'$. Die erhaltenen Minuten werden abermals durch 60 geteilt und zu den gegebenen Grad addiert. Die Lehrperson schreibt das gerundete Ergebnis $40,7236°$N an die Tafel. Die Lehrperson erklärt den Schülern und Schülerinnen, dass man das N für Nord einfach weglassen kann. Bei einem S für Süd, müsste man jedoch ein Minus vor das Ergebnis setzen. Dadurch kann man nun Breitengrade sinnvoll miteinander addieren. Nun benennt die Lehrperson den umgerechneten Breitengrad ϕ_{NY}. Auf die selbe Weise kann man natürlich auch Längengrade umrechnen. Bei dem New York Beispiel ist dies jedoch nicht nötig, da der Längengrad von New York schon rein in Grad angegeben ist. Diesen nennt die Lehrperson nun λ_{NY}. Die Lehrperson schreibt nun $NY = (\phi_{NY}, \lambda_{NY})$ an die Tafel und erklärt, dass es sich dabei um den Punkt handelt, welcher New York auf der Erdkugel entspricht. Da die Schüler und Schülerinnen in der nächsten Phase selbst Koordinaten in reine Grad umrechnen, ist es zu empfehlen, die Umrechnung der Koordinaten in New York ganz genau vorzuzeigen. Das bedeutet, alle Nebenrechnungen schriftlich auszuführen und keinen Rechenschritt auszulassen. Dadurch können die Schüler und Schülerinnen sich bei ihrer selbständigen Arbeit an dem Beispiel der Lehrperson orientieren.
Phase 1.7:
Die Lehrperson bittet die Schüler und Schülerinnen die schon bestimmten Koordina-

ten von Innsbruck und Rio de Janeiro in Partnerarbeit umzuschreiben und zu notieren. Weiters sollen die Schüler und Schülerinnen die Koordinaten von Sydney und Moskau aus dem Atlas herauslesen und umrechnen. Die Lehrperson geht durch die Klasse und versucht bei Problemen zu helfen. Wichtig ist, dass ein einheitliches Ergebnis der Koordinaten von Innsbruck und Rio bestimmt werden konnte, da in der nächsten Stunde mit diesen Koordinaten gerechnet werden soll. Die Koordinaten der beiden weiteren Orte dienen zur Übung, beziehungsweise als Beschäftigung für schnelle Schüler und Schülerinnen . Die unerledigte Arbeit wird beim Ende der Unterrichtsstunde als Hausübung aufgegeben.

28.3. Zweite Unterrichtsstunde

Zeit	Phase/Ziel	Inhalt	Methode	Material
0 - 5 min	**Phase 2.1**	Begrüßung und Organisatorisches		
5 - 10 min	**Phase 2.2** Die Schüler und Schülerinnen erinnern sich an bzw. festigen die Inhalte der letzten Unterrichtsstunde.	Bestimmung und Umrechnung der geographischen Daten von Rio de Janeiro.	Lehrer - Schülergespräch	Beamer, Südamerikakarte
25 min	**Phase 2.3** Die Schüler und Schülerinnen können die Entfernung zweier Orte auf dem selben Längengrad bzw. auf dem selben Breitengrad berechnen.	Bearbeitung des Arbeitsblattes	Partnerarbeit	Arbeitsblatt
10 - 20 min	**Phase 2.4** Die Ergebnisse des Arbeitsblattes werden kontrolliert und vereinheitlicht.	Präsentation und Kontrolle der Ergebnisse des Arbeitsblattes	Lehrer - Schülergespräch	Tafel, Arbeitsblätter

Phase 2.1:
In der ersten Phase werden die Schüler und Schülerinnen wie gewohnt begrüßt und organisatorische Pflichten, wie das Überprüfen der Anwesenheitsliste werden abgehandelt.

Phase 2.2:
Die Lehrperson erinnert die Schüler und Schülerinnen an das ursprüngliche Ziel, die Entfernung nach Rio zu berechnen. Dazu benötigt man die Kompetenz, die geographischen

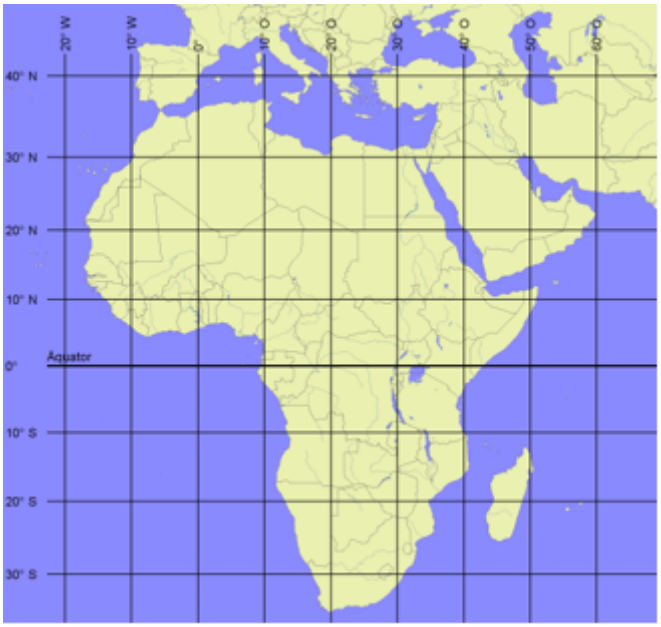
Koordinaten davon, bestimmen zu können. Daher geht die Lehrperson nochmal diesen Vorgang im Detail mit den Schülern und Schülerinnen durch.
Dabei projiziert sie mithilfe eines Beamers eine Südamerika - Karte mit einem Gradnetz an die Wand und fragt ins Plenum, wie man denn nun die geographischen Koordinaten von Rio herausfinden kann. Daraufhin bittet die Lehrperson einen Schüler oder eine Schülerin auf, die Koordinaten in reine Grad umzurechnen. Anschließend betont die Lehrperson die Wichtigkeit dieser Kompetenzen für die kommenden Inhalte und bittet die Schüler und Schülerinnen bei Unklarheiten an dieser Stelle Fragen zu stellen.

Phase 2.3:
Die Lehrperson teilt den Schülern und Schülerinnen das Arbeitsblatt aus, mithilfe dessen sie sich die Inhalte selbst erarbeiten können. Die Lehrperson schreitet dabei durch die Klasse und versucht bei Problemen zu helfen und Fragen zu beantworten. Dabei ist es wichtig, den Schülern und Schülerinnen die Arbeit nicht abzunehmen. Unterstützend fungieren ist in Ordnung, jedoch sollte man ihnen keine Rechenwege oder Ergebnisse verraten.

Auf den nächsten beiden Seiten folgt das Arbeitsblatt.

Entfernungen von Orten mit gleichem Länge - oder Breitengrad

Der Längengrad 20° O durchquert Afrika von Libyen bis zum südlichen Kap der Guten Hoffnung. Ziel ist es nun, die Entfernung dieser beiden Orte zu berechnen. Da Libyen recht groß ist, wähle zur Entfernungsberechnung den südöstlichsten Ort der lybischen Nordküste. Die auf dem Arbeitsblatt angegebene Afrikakarte kann dir bei deinen Überlegungen helfen.



1. Aufgabe:
Ermittle die geographischen Koordinaten der beiden Orte und berechne die gesuchte Entfernung.

2. Aufgabe:
Wandle die Breitendifferenz von Grad in Kilometer um. Dazu muss man wissen, wie viele Kilometer einem Grad entsprechen. (Tipp: Für die Länge des Äquators kann man eine Länge von 40.000 km annehmen.)

3. Aufgabe:
Wir nennen die Breitendifferenz zweier Orte nun $\phi_{\triangle}$. Stelle eine Formel auf, mit welcher man die Breitendifferenz $\phi_{\triangle}$ zweier Orte auf demselben Längenkreis berechnen kann. (Achtung: Die Breitengrade zweier Orte können unterschiedliche Vorzeichen haben. Ermittle die unterschiedlichen Kombinationsmöglichkeiten und stelle eine Formel für jeden der unterschiedlichen Fälle auf. Versuche dann die unterschiedlichen Fälle in eine Formel zusammenzufassen)

4. Aufgabe:
Berechne die Entfernung zwischen West – und Ostküste Afrikas. Betrachte dazu den Breitengrad 10° N. Gib auch zur Entfernungsberechnung zweier Orte auf demselben Breitengrad eine allgemeine Formel an.

Phase 2.4:
Die Lehrperson geht gemeinsam mit den Schülern und Schülerinnen die Aufgaben des Arbeitsblattes durch. Dabei sollen immer Schüler und Schülerinnen , die die Aufgaben erfolgreich erarbeitet haben, ihren Schulkollegen die Lösungen erklären. Diese werden von der Lehrperson aufgrund ihrer Beobachtungen der vorherigen Phase ausgewählt.

28.4. Dritte Unterrichtsstunde

Wie schon erwähnt, soll die dritte Stunde ganz im Sinne eines IBL-Unterrichts nach Menezes geplant sein. Wie schon erwähnt, ist das Verhalten der Lehrperson für einen erfolgreichen Unterricht entscheidend. Man soll davon absehen, den Schülern und Schülerinnen den Vorgang zu erklären beziehungsweise zu schildern. Vielmehr sollte man die Schüler und Schülerinnen mit geschicktem Fragestellen in eine günstige Richtung lenken. Die Idee dieses Konzeptes wurde im Kapitel 26 auf Seite 116 ausführlich erklärt. Nun möchte ich zur Darstellung der dritten Unterrichtsstunde übergehen.

Zeit	Phase/Ziel	Inhalt	Methode	Material
0 - 5 min	**Phase 3.1**	Begrüßung und Organisatorisches		
5 - 10 min	**Einführungsphase** Die Schüler und Schülerinnen erinnern sich an das Gelernte der letzten beiden Stunden und kennen das Lernziel dieser Unterrichtsstunde. Sie wissen, dass sie selbständig das Lernziel erreichen sollen.	Inhalte der letzten Stunden	Frontal	
15 - 20 min	**Entwicklungsphase** Die Schüler und Schülerinnen versuchen konzentriert einen Weg zu finden, die Entfernung zwischen Innsbruck und Rio de Janeiro zu berechnen.	Berechnung der Entfernung von Innsbruck und Rio.	Gruppen - arbeit	
10 min	**Diskussionsphase** Die Schüler und Schülerinnen lernen die Lösungsansätze, Ideen und Vorgehensweisen der anderen kennen.	Berechnung der Entfernung von Innsbruck und Rio.	Gruppen - diskussion	Tafel
10 min	**Systematisierungs - phase** Die Schüler und Schülerinnen erhalten eine mathematisch ausformulierte Methode zur Entfernungsberechnung.	Berechnung der Entfernung von Innsbruck und Rio beziehungsweise Berechnung der Entfernung zweier beliebiger Orte.	Frontal	Tafel

Phase 3.1
In der ersten Phase werden die Schüler und Schülerinnen wie gewohnt begrüßt und organisatorische Pflichten, wie das Überprüfen der Anwesenheitsliste werden abgehandelt.

Einführungsphase
In dieser Phase überprüft die Lehrperson mittels verification questions das Wissen der Schüler und Schülerinnen über die Inhalte der letzten beiden Unterrichtsstunden, da die Entwicklungsphase nur dann Früchte trägt, falls das Vorwissen der Schüler und Schülerinnen ausreichend vorhanden ist. Die Schüler und Schülerinnen müssen verstanden haben, wie man geographische Koordinaten bestimmt und umrechnet. Weiters müssen sie in der Lage sein, die Entfernung zweier Orte auf dem selben Breiten - beziehungsweise Längengrad berechnen zu können. Dann erklärt die Lehrperson, dass die Schüler und Schülerinnen nun in Vierergruppen versuchen müssen, dass Problem selbstständig zu lösen. Sie bekommen noch den Tipp auf den Weg, sich aus der Trickkiste der sphärischen Trigonometrie zu bedienen.

Entwicklungsphase
Die Lehrperson teilt die Schüler und Schülerinnen in Vierergruppen ein. Am schnellsten und einfachsten funktioniert die Einteilung, indem sich zwei Sitznachbarn einfach umdrehen. Man sollte jedoch darauf achten, dass in jeder Gruppe mindestens eine Person sitzt, welche lösungsorientiertes und strukturiertes Denken und Arbeiten beherrscht. Ein/e Schüler/in sollen den Arbeitsprozess protokollieren, sodass eine lückenlose Präsentation in der nächsten Phase möglich ist. Nun sollen die Schüler und Schülerinnen selbstständig die Entfernung zwischen Innsbruck und Rio mittels sphärischer Trigonometrie berechnen. Dabei unterstützt die Lehrperson die Schüler und Schülerinnen , indem sie sie mittels focusing questions auf den richtigen Pfad lenkt. Dazu können inquiry questions verwendet werden, um die Ideen und Vorgehensweisen der Schüler und Schülerinnen zu verstehen.

Ein gewinnbringender Lösungsansatz wäre zum Beispiel, dass man sich zu den beiden gegebenen Orte einen dritten Ort hinzunimmt, um ein sphärisches Dreieck zu erlangen. Man kann sich sogar ohne die Hilfe eines Atlanten die Koordinaten des Nordpols, 90° N, 0° W, überlegen. Somit erhält man ein sphärisches Dreieck. Um sich die Entfernung der beiden gegebenen Orte mithilfe der Trigonometrie berechnen zu können, benötigt man noch weitere Größen des Dreiecks, welches in der Abbildung 34 auf Seite 132 dargestellt ist. Die Entfernungen zwischen Nordpol und Rio $\widehat{NR}$ sowie zwischen Nordpol und Innsbruck $\widehat{NI}$ lassen sich mithilfe der geographischen Daten leicht bestimmen. Zusätzlich lässt sich auch der Winkel γ bestimmen. Man nehme dazu an, dass R zwar auf dem selben Längengrad, jedoch auf dem Breitengrad 0, also dem Äquator liegt. Selbiges nehmen wir auch für I an. Die Entfernung zwischen den beiden, lässt sich mithilfe des erlangten Wissens aus der zweiten Unterrichtsstunde leicht berechnen. Diese Entfernung entspricht genau dem Winkel γ. Mithilfe dieser drei Größen, kann man sich nach Verwendung des sphärischen Seitenkosinussatzes die Seite $\widehat{RI}$ bestimmen. Wenn man dieses Ergebnis nun von Grad in Kilometer umrechnet, erhält man die Entfernung von Innsbruck nach Rio

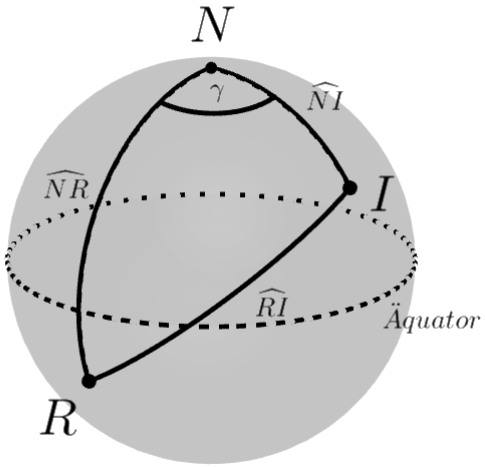


Abbildung 34: Skizze zur Berechnung der Entfernung von Innsbruck nach Rio de Janeiro

in Kilometer.

Auf diesen Lösungsweg soll man die Schüler und Schülerinnen nur mit dem Stellen von Fragen leiten. Zum Beispiel könnte die Lehrperson sehen, dass eine Gruppe nicht versteht, wie man die Trigonometrie einsetzen soll. Dieses Problem kann die Lehrperson mithilfe einer inquiry question wie "Wo liegt das Problem?" erheben. Anschließend kann die Lehrperson eine focusing quesion wie "Was benötigt man für ein Dreieck?" stellen. Die Schüler und Schülerinnen könnten dann erkennen, dass sie noch einen weiteren dritten Punkt benötigen. "Welchen Punkt könnte man hinzunehmen?", Welcher Punkt würde sich anbieten?". Mit diesen Fragen könnten die Schüler und Schülerinnen auf die Idee kommen, einen Pol hinzuzunehmen. Wichtig ist, dass die Schüler und Schülerinnen immer selber den nächsten Schritt erkennen.

Diskussionsphase
Nun werden die erstellten Protokolle der Vierergruppen der Reihe nach präsentiert. Dabei sollen die Schüler und Schülerinnen ihren Fokus auf ihre Ideen und Vorgehensweisen legen. Während der Präsentationen dürfen Fragen gestellt und diskutiert werden. Die Lehrperson kann mittels inquiry questions nachhaken, falls sie die Vorgehensweise einer Gruppe nicht verstanden hat. Die Ideen und Ergebnisse werden von der Lehrperson in Stichworten übersichtlich auf der Tafel festgehalten.

Systematisierungsphase
Die Lehrperson fasst in der letzten Phase die Ergebnisse der Gruppen kurz zusammen. Die geglückten Vorgehensweisen werden nun von der Lehrperson in eine mathematische Sprache verfasst und verschriftlicht. Das heißt, dass die Lehrperson die Aufgabe ge-

meinsam mit den Schüler und Schülerinnen an der Tafel löst. Diese notieren sich diesen präsentierten Lösungsweg in ihrem Heft. Sollte die Zeit nicht mehr reichen, so kann die Lehrperson einen optimalen Lösungsvorschlag ausformuliert in Form eines Hand - outs nachreichen. Wichtig ist, dass die Schüler und Schülerinnen einen zielführenden Rechenweg in korrekter mathematischer Sprache in ihren Unterlagen haben. Bei Bedarf kann die Lehrperson am Ende der Unterrichtsstunde, den Schüler und Schülerinnen zur Festigung die Berechnung einer Entfernung zwischen zwei beliebigen Orten als Hausaufgabe mitgeben. Beziehungsweise kann man die Festigung auch in die nächste Schulstunde verschieben.

Abbildungsverzeichnis

1. Einheitskreis . . . 11
2. Gleicher Funktionswert . . . 13
3. Gerade durch 0 . . . 18
4. Darstellung von R durch P und Q . . . 20
5. Vektorprodukt . . . 24
6. Euklidische Norm . . . 40
7. Herleitung des Fußpunktes . . . 48
8. Fußpunkt und Kosinus . . . 51
9. Darstellung der Fläche eines Parallelogramms . . . 55
10. Skizze zu (M3) bezüglich der euklidischen Geometrie . . . 57
11. Die Einheitskugel . . . 58
12. Sphärische Abstand . . . 59
13. Graph der Kosinusfunktion . . . 65
14. Groß - und Kleinkreis . . . 67
15. Beschreibung von Großkreisen . . . 68
16. kurzer - und langer Großkreisbogen . . . 69
17. Der sphärische Winkel . . . 70
18. sphärisches Dreieck . . . 72
19. Winkelsumme des ebenen Dreiecks . . . 72
20. Denkstütze zum Beweis der Winkelsumme . . . 78
21. Gegenüberliegender Winkel . . . 80
22. Beschränktheit der sphärischen Winkelsumme . . . 81
23. Großkreis mit Pole . . . 82
24. Überlegung zu Gegenwinkel . . . 84
25. Beispiel zu "SWS" . . . 92
26. Beispiel zu "WSW" . . . 95
27. Skizze zum Beweis des Winkelkosinussatzes . . . 96
28. Beispiel zu "SSW" . . . 100
29. Beispiel zu "SWW" . . . 101
30. Lösungsskizze zu "SSWW" mit spitzem Winkel β . . . 107
31. Lösungsskizze zu "SSWW" mit stumpfen Winkel β . . . 108
32. Ein doppelrechtwinkliges Dreieck . . . 112
33. Acht Kugeloktanten . . . 113
34. Skizze zur Berechnung der Entfernung von Innsbruck nach Rio de Janeiro 132

Literatur

[Bär08] Christian Bär. *Elementargeometrie. Vorlesungsskriptum.* Universität Potsdam, 2008.

[Bil17] Bundesministerium für Bildung. *AHS-Lehrpläne Oberstufe neu: Mathematik.* 2017. URL: https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf.

[Cra42] Paul Crantz. *Sphärische Trigonometrie. Nebst Anwendungen zum Selbstunterricht.* 7 vols. Leipzig and Berlin, 1942.

[Ham07] Ernst Hammer. *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht und in Schulen besonders als Vorbereitung auf Geodäsie und sphärische Astronomie.* Stuttgart, 1907.

[HO16] Tobias Hell and Alexander Ostermann. *Analysis 1. Vorlesungsskriptum.* Universität Innsbruck, 2016.

[htt] MathLover (https://math.stackexchange.com/users/415928/mathlover). *Reasoning for equality of Cauchy Schwarz inequality holds.* Mathematics Stack Exchange. URL:https://math.stackexchange.com/q/2878304 (version: 2018-08-10). eprint: https://math.stackexchange.com/q/2878304. URL: https://math.stackexchange.com/q/2878304.

[Kön03] Konrad Königsberger. *Analysis 1. Sechste, durchgesehene Auflage.* Berlin and Heidelberg, 2003.

[Las90] Vaclav Jan Laska. *Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben.* Stuttgart, 1890.

[Men+13] Luis Menezes et al. "Essay on the Role of Teachers' Questioning in Inquiry - Based Mathematics Teaching". In: *Sisyphus - Journal of Education* 1 (2013), pp. 44–75.

[Pau17] Franz Pauer. *Lineare Algebra 1. Vorlesungsskriptum.* Universität Innsbruck, 2017.

[Pau19] Franz Pauer. *Algebra und Geometrie im Schulunterricht. Vorlesungsskriptum.* Universität Innsbruck, 2019.

[Sch17] Berthold Schuppar. *Geometrie auf der Kugel. Alltägliche Phänomene rund um Erde und Himmel.* Berlin and Heidelberg, 2017.

[SM10] M.J. Sterling and J. Muhr. *Grundlagen der Linearen Algebra für Dummies.* ... für Dummies. 2010.

[Zeg08] Mark Zegarelli. *Grundlagen der Mathematik für Dummies.* ger. 1. Aufl.. ... für Dummies. 2008. ISBN: 9783527704415.